段階反応モデルの項目母数についてのスコア関数

小杉考司

GRM の定式化と対数尤度関数

γ_{jk} を項目 j のカテゴリ k への累積確率として，

$$\log\left(\frac{\gamma_{jk}}{1-\gamma_{jk}}\right) = \alpha_j(z-\beta_{jk})$$

とする。ここで α_j は識別力，β_{jk} は閾値，z は被験者母数。この式を展開することで，項目反応理論的な表現になる。

$$\frac{\gamma_{jk}}{1-\gamma_{jk}} = \exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}))$$

$$\gamma_{jk} = (1-\gamma_{jk})\exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}))$$

$$\gamma_{jk} + \gamma_{jk}\exp(\alpha_j(z-\beta_{jk})) = \exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}))$$

$$\gamma_{jk}(1+\exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}))) = \exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}))$$

$$\gamma_{jk} = \frac{\exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}))}{(1+\exp(\alpha_j(z-\beta_{jk})))} \tag{1}$$

$$= \frac{\exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}))}{(1+\exp(\alpha_j(z-\beta_{jk})))} \cdot \frac{\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}{\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}$$

$$= \frac{\exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}) - \alpha_j(z-\beta_{jk}))}{\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk})) + \exp(\alpha_j(z-\beta_{jk}) - \alpha_j(z-\beta_{jk}))}$$

$$= \frac{1}{1+exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}$$

さてここで，項目 j のカテゴリ k に対する反応確率 P_{jk} は，

$$P_{jk} = \gamma_{j(k-1)} - \gamma_{jk}$$

と表すことができるから，項目 j，カテゴリ k に対する反応度数 U_{jk} からモデル全体の対数尤度は以下のように表せる (ただし，$\gamma_{j0} = 1, \gamma_{jK} = 0$)。

$$\log L = \sum_j \sum_k U_{jk} \log P_{jk}$$

項目ごとに求めるなら，

$$\log L_j = \sum_k U_{jk} \log P_{jk}$$

である。

スコア関数

スコア関数は対数尤度関数のパラメータに関する勾配，つまり偏微分した導関数のこと。識別力 α_j については，$y = \log f(x), u = f(x)$ という合成関数の微分に注意して，

$$\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{dy}{du}\log u \cdot \frac{du}{dx}f(x)$$

$$\frac{d\log f(x)}{dx} = \frac{1}{f(x)}f'(x)$$

であることに注意して，

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha_j} = \sum_j \sum_k U_{jk}\frac{1}{P_{jk}}\frac{\partial P_{jk}}{\partial \alpha_j}$$

さらに

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \gamma_{j(k-1)}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial \alpha_j}$$

である。ここから γ の微分を考える。$y = \dfrac{1}{1+u}, u = \exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))$ とした，合成関数の微分は $f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}f(u) = f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial \alpha_j}$$

であり，$f(u) = \dfrac{1}{1+u} = (1+u)^{-1}$ だから，$f'(u) = -1(1+u)^{-2} = \dfrac{-1}{(1+u)^2}$.

さらに $\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_j} = \dfrac{\partial}{\partial \alpha_j}\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))$ においても，$y = \exp(u), u = -\alpha_j(z-\beta_{jk})$ だから，

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_j} = \exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))\cdot -(z-\beta_{jk})$$

まとめると，

$$\frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial \alpha_j} = \frac{-1}{(1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk})))^2}\cdot\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))\cdot -(z-\beta_{jk})$$

$$= \frac{1}{1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}\cdot\frac{1}{1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}\cdot\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))\cdot(z-\beta_{jk})$$

$$= \gamma_{jk}\cdot\frac{\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}{1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}\cdot(z-\beta_{jk})$$

$$= \gamma_{jk}\cdot\frac{1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))-1}{1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}\cdot(z-\beta_{jk})$$

$$= \gamma_{jk}\cdot\left(1-\frac{1}{1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))}\right)\cdot(z-\beta_{jk})$$

$$= \gamma_{jk}(1-\gamma_{jk})(z-\beta_{jk})$$

となる。ここから,

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \alpha} = \gamma_{j(k-1)}(1-\gamma_{j(k-1)})(z-\beta_{j(k-1))}) - \gamma_{jk}(1-\gamma_{jk})(z-\beta_{jk})$$

である。

閾値母数の方も同様に,

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta_{jk}} = \sum_j U_{jk} \frac{1}{P_{jk}} \frac{\partial P_{jk}}{\partial \beta_{jk}}$$

であり，さらに

$$\frac{\partial P_{jk}}{\partial \beta_{jk}} = \frac{\partial \gamma_{j(k-1)}}{\partial \beta_{jk}} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial \beta_{jk}}$$

であるが，この時第一項，$\dfrac{\partial \gamma_{j(k-1)}}{\partial \beta_{jk}}$ の $\gamma_{j(k-1)}$ には β_{jk} が含まれないので 0 としてよい。第二項は識別力母数と同様で,

$$\frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial \beta_{jk}} = \frac{-1}{(1+\exp(-\alpha(z-\beta_{jk})))^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta_{jk}} \exp(-\alpha(z-\beta_{jk}))$$

後ろの項は,

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{jk}} \exp(-\alpha(z-\beta_{jk})) = \exp(-\alpha(z-\beta_{jk})) \cdot \frac{\partial}{\partial \beta_{jk}}(-\alpha(z-\beta_{jk})) = \exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk})) \cdot \alpha_j$$

だから,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial \beta_{jk}} &= -1 \cdot \frac{1}{1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))} \cdot \frac{1}{1+\exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk}))} \cdot \exp(-\alpha_j(z-\beta_{jk})) \cdot \alpha_j \\ &= -\alpha_j \gamma_{jk}(1-\gamma_{jk})\end{aligned}$$

となる。

以上から，項目ごとのスコア関数は,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \log L_j}{\partial \alpha_j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{K} U_{jk} \frac{1}{\gamma_{j(k-1)} - \gamma_{jk}} \left\{ \gamma_{j(k-1)}(1-\gamma_{j(k-1)})(z-\beta_{j(k-1)}) - \gamma_{jk}(1-\gamma_{jk})(z-\beta_{jk)}) \right\} \\ \dfrac{\partial \log L_j}{\partial \beta_{jk}} = U_{jk} \dfrac{1}{\gamma_{j(k-1)} - \gamma_{jk}} \{\alpha_j \gamma_{jk}(1-\gamma_{jk})\} \end{cases} \tag{2}$$

となる。