心理学データ解析応用 1/2
心理学データ解析 2A/B
詳細シラバス

担当：小杉考司

Last Compiled on 2022.12.27

目次

はじめに

昨今はデータサイエンス，情報科学の領域が非常に隆盛で，コンピュータを使ってデータを分析し，経済の動向や購買行動などの予測に用いられることが広く行われている。

人の行動や考え方をどのようにデータにするかについては，当然ながら心理学には一日の長がある。また，人が頭の中でどのような考え方のプロセスをたどるのか，それをどのように検証するのかについても，心理学はその短い歴史の中で徹底的にその技法を洗練させてきた。このような根源的なレベルでの理論や方法論は時代が変わっても色褪せることなく，また今後ますます必要とされてくる時代になっている。

本講ではデータ解析の応用段階として，より実践的なテーマを扱う。すなわち，**心理尺度が作られる理論的背景**と，**データの背後のメカニズムを解析する方法**を知ることである。

心理学研究法の 1 つとして，調査研究がある。紙とペンで回答を集めた時，回答者がある反応カテゴリにまるをつけたことが，どうして数値処理の対象になるのか。そこには数字を割り振るルールとしての「尺度化」の手続きがある。残念ながら応用的側面が発展しすぎたため，回答に数字を割り振る原理について語られることが少なくなってきてしまい，それに対する反動からか，近年改めてこの根本原理についての理解と解説が求められている。この講義では，尺度化の原理や目に見えない潜在変数を想定して分析するとはどういうことかについて，理論と演習を交えながら習得することを目指す。この理論的側面を考えるためには，どうしても線形代数・行列計算の知識が必要になってくる。線形代数については特別な事前知識は不要で，定義から改めて解説するので安心してもらいたい。

心理学研究法のまた 1 つの大きな柱として，実験的研究がある。実験的研究はその手続きが厳格に準備されていることで，結果は群間の平均値差を推定すれば十分である，とされてきた。心理学の基礎領域では，そのため，標本の平均値から母集団の平均値を推測する方法が主なテーマになる。しかしこの方法は逆に，結果を群間の平均値差に帰着させるための実験計画を必要とする。結果に方法が規定されているのである。本来考えたかったことは群間の差だけではなく，どのようにして心理的なメカニズムからデータが生成されているか，という問いであったことを思い出そう。そして群間の平均値に拘ることなく，心理的なメカニズムを数式的に表現することで分析する**数理モデリング**というアプローチがある。このモデリングの基礎的な知識，方法論の習得を目指す。

授業のテーマ

データから意味のある情報を取り出すための，さまざまな分析法を習熟するにあたって，その背後にあって語られることのない「発想」の観点から理解する。数値だけに振り回される状態から脱却し，数値を算出する数式に込められた意味について考える視点を持つ。さらにこれらに習熟することで，どのような研究対象に対してどのような心理統計的アプローチができるかを，俯瞰的に見られるようになろう。

一年を通じて伝えたいポイント

尺度化とは何か　心理学で行われるアンケート調査やその後の分析はどういう原理があって「心を測定した」といえるのか。その原理やモデルを理解して利用できるようになる。

多変量解析から何がわかるのか　調査研究などで得られた多変量を分析することで何がわかるのか。あるいは何をしてわかったというのか。

多変量解析の基礎となる数式的原理　多変量解析の背景にあるのは線形代数という数学であり，線形代数の基礎を学ぶことで多変量解析のメカニズムを統合的に理解できる。

データ生成メカニズム　データから情報を取り出す受け身的な分析ではなく，データに数字を与えたり，データが生まれてくるメカニズムをリバースエンジニアリングすることで，さらに積極的にデータ解析に立ち向かおう。

統計環境 R と確率的プログラミング言語 Stan による実践　統計環境 R と確率的プログラミング言語 Stan に習熟することで実際に計算し，確認しながら分析を進めることができる。

1 イントロダクション

1.1 授業内容

1.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

この講義の位置付けは，基礎的な心理統計の学習は終わった後の応用的内容となる。基礎的な内容として，確率の基本的な考え方，線形モデル (回帰分析，群間の平均値差の検討)，さまざまな推定法による母数の推定と検定の考え方を理解しているものとする。これに基づいての応用であるから，扱うデータも単変量ではなく多変量であるし，数学的には行列表現を用いることになる。これらを使って，回帰分析や因子分析の数理的理解を目指す。このコマではこの講義によって扱われる領域を外観するとともに，基礎的な内容で扱ったものがしっかりと定着しているかどうかを確認することを目的とする。

1.1.2 コマ主題細目

正規線形モデルの世界 単変量ではなく多変量を扱う統計の領域に入るので，多変量データとはどのようなものであるかに言及した上で，本講義の扱う領域を概観する。心理統計の応用的分野では，正規分布を仮定した線形モデルがその大半を占めている。正規線形モデルに含まれるさまざまな下位モデルの名称を紹介するとともに，構造方程式モデリングに統合されることや，非線形なモデルとの違いについて理解する。加えて正規分布ではない分布を扱うモデルも増えてきている昨今，これらについてのモデリングアプローチの存在についても講義する。

→ 正規線形モデルの枠組みについては，三中 (2018) 参照。

尺度の四水準 心理統計の基礎で触れたが，データ化として扱う数値はその尺度水準によってどのような計算が可能かということに違いが生じる。このことは，そのまま分析モデルや名称の違いに繋がるため，改めて名義，順序，間隔，比率の 4 水準を確認しておく。

→ Stevens (1946) の論文は短く，ネットで読むこともできる。入門書としては川端・荘島 (2014) の Pp.9–16，あるいは山田・村井 (2004) の Pp.22-25.

平均と分散 間隔尺度水準以上の数字であれば，平均値や分散，標準偏差によってその特徴を要約できる。ここではこれらの代表値の表記について，数学的記号とともに確認する。加えて，分散式を展開して表現したものや，分散がデータから得られる情報の上限であることを確認する。

共分散と相関係数 共分散やそれを標準化した相関係数は，複数の変数間関係を表現する最もシンプルなものの 1 つである。ここではこれらの複数の変数間に関わる代表値について，数学的記号とともに確認する。加えて，この他の関係の表現方法として，距離や共頻度などの共変量について解説し，それらの違いに応じて統計モデルが変わりうることを確認する。

→ 記述統計量については川端・荘島 (2014) の Pp.26-33 など基礎的な心理統計の教科書を参照すると良い。

1.1.3 キーワード

- 正規線形モデル
- 尺度水準
- 平均と分散
- 共分散と標準偏差

1.2 授業情報

■コマの展開方法 講義

1.2.1 予習・復習課題

■予習 心理統計の基礎について，今一度基礎的なテキストを参照しながら，自分の理解度を再確認しておくと良い。とくに尺度水準や記述統計量の計算方法などは今後この講義でも頻出するので，確認しておく必要がある。

■復習 数式の展開を踏まえて理解しておくとともに，実際のデータを使ってて計算しながら確認すると良い。とくに分散は二乗のオーダーになるので元の単位に比べて大きな数字になること，標準化のプロセスや相関係数の大きさなど，逐一確認しておくべきである。

2 心理尺度を作る

2.1 授業内容

2.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

目に見えないものを測定するために心理学が洗練してきた手法が，心理尺度である。心理尺度の作成方法としてサーストン法，リッカート法，SD 法などがあり，心理学の初頭コースで習うものも少なくないが，その本質は反応カテゴリに数値を割り当てる，というところにある。「そう思わない」「ややそう思わない」などといったカテゴリーに対する反応が，なぜ 5 や 4 といった数字にすることが許されるのか。カテゴリカルな反応が連続的な量として扱うことができる理由などについて，よく知られていない現実がある。この点をしっかり理解しないまま進んだ分析を行うと，結果の解釈はもちろんそもそもの研究が足元から崩壊することにもなりかねない。本講義ではこの点について，作成方法から数値化まで一通り確認し，最後に心理尺度の評価基準である信頼性と妥当性について理解する。

2.1.2 コマ主題細目

サーストンの等現間隔法 サーストン法と呼ばれる尺度構成法は，態度とよばれる心理学的特性を仮定している。この態度は対象，符号，強度をもち，正規分布すると仮定されている。個々人の態度を測定するために，事前に評定者集団を用意して項目を採点しておく必要がある。そこで評定値に等間隔性を持たせる工夫をしているため，態度の数値化ができるという原理を理解する。

→ サーストン法による尺度作成については末永 (1987) の Pp.149–152 参照。

リッカートのシグマ法 リッカート法は最もよく使われるスタイルの心理尺度である。カテゴリーに無頓着に数字を割り振る慣例がみられるが，本来は潜在的態度が正規分布することを想定し，確率分布の確率点を得点とする方法であった。このような数値化がされているからこそ，順序尺度ではなく間隔尺度水準と「見なす」ことが許されてきているのである。この原理を理解しておくことは，後のより進んだ尺度作成法を理解する助けになる。

→ リッカート法による尺度作成については，宮谷・坂田・林・坂田・入戸野・森田 (2009) の Pp.150–153 を参照。ただしシグマ法についての言及はなく，田中 (1977) などの古典を当たらねばならない。

尺度を評価する 作られた尺度を評価する方法として，IT 相関を求めるものや内的整合性信頼性を求めるものがある。その背後には信頼性と妥当性の考え方があることを確認する。

→ 心理尺度の信頼性については，末永 (1987) の Pp.156–158，妥当性については Grimm and Yarnold (2001) の第 4 章も参照。

2.1.3　キーワード

- サーストンの等現間隔法
- リッカートのシグマ法
- 信頼性
- 妥当性

2.2　授業情報

■コマの展開方法　講義

2.2.1　予習・復習課題

■予習　基礎実習で尺度作成法や尺度の分析をしたことがあれば，その時の資料を再確認しておく。とくに反応カテゴリをどのように採点したか，また尺度の評価どのように行ったかを確認する。とくに尺度作成の経験がない場合は，関連書籍を参考に方法論を予習しておくことが望ましい。

■復習　IT 相関やアルファ係数は統計環境 R で簡単に計算できる。とくに psych パッケージにはこれらの関数がすでに準備されている。サンプルデータを使ってこれらを計算してみよう。

3 テスト理論と因子分析

3.1 授業内容

3.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

目に見えないものを測定するという意味で，テスト理論は心理学の測定と関係が深い。前回は社会心理学における態度の測定を前提に議論したが，測定に関してはテスト理論で一般的に議論できる。

真のスコアと誤差とに分解すること，誤差の基本的な仮定を確認した上で，古典的テスト理論を項目と被験者の特性に分割することで因子分析モデルに展開されるところを見る。また，多因子モデルに拡張した上で，その数理的展開から，信頼性と妥当性に言及できることを確認する。数式の展開は代数の基本的な特徴を確認すれば問題なくフォローできるはずである。

3.1.2 コマ主題細目

古典的テスト理論 古典的テスト理論についての復習である。その基本モデルについて触れ，その平均値と分散が意味するところから測定モデルの意味するところ（誤差が相殺しあうこと）と信頼性の定義が導出できることを改めて確認しておく。

因子分析モデル 因子分析モデルは，古典的テスト理論のモデルを拡張したものである。まずは単因子モデルを例に，項目特性と被験者特性が分離されたことを確認する。その上で，性格検査や知能検査などの歴史に触れながら，多因子モデルについて解説する。多因子モデルを例に記号や添字を確認しておく。

→ 小杉 (2018) の Pp.173–177

因子分析の第 2 定理 因子分析モデルを展開することで，相関係数が因子負荷量の積和で表現できること，因子得点がその仮定から計算上消えることを確認する。得られた指揮は因子分析の第二定理と呼ばれ，妥当性に関する議論がここから導かれることをみる。

因子分析の第 1 定理 ある項目自身の相関係数を考えることで，因子分析の第一定理にたどり着く。ここで共通因子の二乗和を共通性と呼ぶことにすると，信頼性の考え方が項目レベルで行われるように発展したことが確認できる。

→ 小杉 (2018) の Pp.173–177

3.1.3 キーワード

- 古典的テスト理論
- 因子分析法
- 因子分析の定理

3.2　授業情報

■コマの展開方法　講義

3.2.1　予習・復習課題

■予習　一年時に信頼性･妥当性について，あるいは古典的テスト理論について学んだことを復習し，どのような概念であったかを再確認しておくことが望ましい。

■復習　テスト理論と因子分析モデルの関係について，因子分析モデルはどこが新しく何を改定しようとしたのかについて，自分なりの言葉で説明できるようになろう。

4 現代テスト理論

4.1 授業内容

4.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

テストの理論も目に見えないものを測定するという意味では，心理学と同じモデルを実践する領域である。心理学的尺度作成法の発展には，テスト業界における理論的展開の位置付けを知ることが役に立つ。

因子分析によって項目と被験者の特徴を分離して考えることができるようになった。ここで学力テストに目を向けると，単因子でよいことと従属変数がバイナリになっていることがわかる。

この特殊な測定法についてのモデルを考えるために，まずは通過率の概念を導入したうえで，累積正規分布とその近似としてのロジスティック曲線，および 1,2,3PL モデルを紹介する。これらのテストは新しいテスト理論とよばれるが，それはこれまでのテスト理論に含まれていた集団に依存した測定であったこと，完全データに限定されていたことなどを乗り越えられるからである。もちろんテストの等価がしやすいという側面もある。

テスト理論の展開としての項目反応理論と，因子分析モデルとの相同性を強調することで，見えないものを測定しようとするアプローチという意味では同じであったことを確認する。

4.1.2 コマ主題細目

因子分析とテスト理論 単因子モデルの特殊事例として，学力テストの例を考える。学力テストの性質から，因子構造よりも因子得点に注目するという強調点の違いはあるが，因子分析モデルの一環として捉えることを強調する。

→ 高橋 (2002) は最も平易なテスト及び現代テスト理論への入門書である。最初の数ページだけでも参考になる。

通過率と累積正規分布 学力テストの分析例として，通過率の計算から累積正規分布へとつなげる。累積正規分布をそのまま確率モデルに繋げてもよいが，ロジスティック曲線を使う方が関数の形が簡単であり，こちらの方が実際には使い勝手が良い。ベルヌーイ分布を用いた線形回帰モデルの文脈で考えれば，ロジスティック回帰分析をしていることでもあることに言及する。

→ 通過率については豊田 (2012) の Pp.1–8 を，ロジスティック関数と累積正規分布の関係については加藤・山田・川端 (2014) の Pp.81–83 を参照

項目母数の特徴 ロジスティック曲線を導入することで，関数の変形がたやすくなった。ここでは 1PL,2PL ロジスティックモデルを導入し，どの項目母数が関数の位置や形をどのように変えるか，そしてそれが意味するところを理解する。モデル的には 5 母数モデルまで考えられるが，実際にはせいぜい 3PL モデルである。この講義では後の因子分析との対応関係も考えるため，2PL モデルまでの紹介に留める。

→ 項目母数については豊田 (2012) の Pp.31–34，加藤他 (2014) の Pp.71–80 が参考になる。

被験者母数の特徴 項目母数が明らかになった状況に置いて，どのように被験者母数を推定するかを考える。ここで ICC から逆算的に被験者母数の位置がどこにあるか，該当領域を絞り込んでいく尤度関数を視覚的に確認する。この方法を使うと，すべての項目についての回答が得られていないと推定できないといった不便がなく，また被験者母数の位置によっては ICC がそれほど有用な情報を与えてくれないこともある。これらの点は，完全情報最尤推定や情報関数にもつながるため，しっかりと理解しておくことが必要である。

→ 被験者母数の絞り込みについては，小杉・清水 (2014) の Pp.171–172. が参考になる。

4.1.3 キーワード

- 通過率
- ロジスティックモデル
- 被験者母数の推定について

4.2 授業情報

■コマの展開方法 講義

4.2.1 予習・復習課題

■予習 テストの前提となる標準正規分布について復習しておく。とくに R を使って出力できる確率密度，確率点，累積確率など手を動かして予習しておくと良い。

■復習 適当なグラフ描画ツール (R でよい) をつかって，ロジスティックモデルを描写し，項目母数をどのように変えるとどのように曲線の形が変わるかを確認してみよう。

5　現代テスト理論その 2

5.1　授業内容

5.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

項目反応理論の数学的特徴を踏まえることと，現代的尺度構成法の理論的基礎を学ぶ。

項目反応理論の導入によって，被験者母数と項目母数が完全に分離され，項目の特徴を細かく記述できるようになった。また，項目の特徴がわかっていればテストの実践方法も変わってくる。ひとつは CAT に代表されるように，ダイナミックに出題を変化させせることができるようになること，そうしたうえでもテストの平均点が事前にコントロールしうることなどが示される。項目から得られる情報という観点から項目情報曲線が，項目情報曲線の累積からテスト情報曲線が導出される。

つづいてこのテスト理論の発展形として，多段階モデルに拡張可能なことをみる。とくに段階反応モデルは，リッカートのシグマ法のように段階反応をモデルかできるという意味で，現代的リッカート法であるともいえる。段階反応モデルを用いることで，適切な反応段階のチェックをできるなど，応用的側面が高いことを確認する。

またテスト理論は因子分析の特殊系であるという扱いだったが，多段階，多因子へと展開することで再び因子分析モデルに統合されていくことを確認する。

5.1.2　コマ主題細目

現代テスト理論の特徴　現代テスト理論の特徴は，項目母数と被験者母数の分離，完全情報最尤推定，項目情報曲線による信頼性の表現，項目プールがあれば事前にテストの平均点を設計できることがあげあられる。また Computer Adopted Test の形式を用いることでテストのあり方そのものも変わってしまう。ただし実際には，膨大な項目プールが必要であること，事前に項目母数を準備しておく必要があること，その他「公平性のために新しいテストでなければならない」という信念などが弊害となって実践的には敷居が高いことなどを解説する。

→ 古典的テスト理論との比較については，加藤他 (2014) の Pp.67–69，あるいは豊田 (2012) の前書きが十分に詳しい。

段階反応モデル　テスト理論はバイナリデータに対する分析だが，多段階の反応に拡張する方法がいくつか考えられている。1 つは段階反応モデルとよばれるもので，これを使うと適当な反応段階数がデザインできるなど利点は大きい。またその考え方はリッカートのシグマ法を洗練したものであるとも言え，せめてこうした方法を使わないと多段階反応を適当に分析できていない。統計パッケージなどの実装も進んでいるので，計算コストはほとんど障壁にならない。また，ポリコリック相関係数を用いた因子分析を実行すると，段階反応モデルのパラメータに変換できることから，因子分析とテスト理論が同じものであったことを再確認できる。

→ 豊田 (2012) の Pp.155–172 が詳しい。

因子分析の歴史と展開　因子分析モデルもテスト理論も潜在変数モデルとしては同じであり，一方が単因子・二段階，他方が多因子・多段階であることが道を分つ。またその性質から，一方が因子得点に，他方が因子構造に着目するため，テストの構成についての考え方が異なることにも注意する。繰り返しになるが，統計パッケージ上の実装は進んでいるので，どちらを使うにしてもとくに苦労することなく，積極的にカテゴリ軽モデルを推進していくべきである。

5.1.3　キーワード

- 項目情報曲線，テスト情報曲線
- 段階反応モデル
- 因子分析モデルとテスト理論

5.2　授業情報

■コマの展開方法　講義

5.2.1　予習・復習課題

■予習　項目反応理論，とくに 2PL モデルによる因子得点の算出方法を確認しておくと同時に，心理尺度ではどのように尺度値を定めていたかについて復習しておく。

■復習　信頼性についての考え方が，古典的テスト理論，因子分析論，現代テスト理論を通じてどのように変わってきたかを確認しておこう。

6　行列計算の基礎

6.1　授業内容

6.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

テスト理論や因子分析モデルの展開を理解した上で，さらに次のステップに進むためには，より数学的な構造の理解が必要である。ここまで因子分析モデルでは，因子得点をどのように算出するかが論じられていない。また相関行列を分解して因子負荷量を算出するにあたっても，どのように計算するかについては言及されてこなかった。これらの点を理解するための道具となるのが線形代数である。具体的には，行列の固有値分解を通じた解釈をすることで，因子分析，回帰分析など多変量データの方程式モデルを統一的に表現・理解できるようになる。そのための道具立てとして，線形代数の基礎知識を習得する必要がある。本講はこのより進んだ理解に向かうための，新しい数学ツールの導入を行う。

線形代数は方程式を簡便的に表現するための表現法であり，行列の観点から新たに四則演算を定義し直すことで一般的な表現が可能になることを示す。

6.1.2　コマ主題細目

行列とベクトル　多変量データを行列とベクトルで表現することをみる。学ぶべき用語として，スカラー，縦ベクトル，横ベクトル，行列，正方行列，対称行列，対角行列，単位行列をあげる。

行列の四則演算　ベクトルとベクトルの和，行列と行列の和，スカラーとベクトルの積，スカラーと行列の積，縦ベクトルと横ベクトルの積，横ベクトルと縦ベクトルの積，行列と行列の積をみる。とくにサイズが変わることに注意が必要である。

行列による便利な表現　連立方程式が行列で表現できることを見る。

逆行列と連立方程式　行列の割り算に当たるのが逆行列である。逆行列は存在しないこともあるが，もし適当なものが見つかればそれは連立方程式の解を一気に計算ができることになる。

6.1.3　キーワード

- ベクトル，スカラー，行列
- 行列の四則演算
- 連立方程式

6.2　授業情報

■コマの展開方法　講義

6.2.1　予習・復習課題

■予習　とくに予習の必要は感じないが，授業に参加するにあたってはノートの準備が必要である。

■復習　計算方法に慣れておく必要があるので，練習問題を繰り返して行うことで，とくに行列の積の計算ができるようになっておく。線形代数の入門書としては，数学のテキストとして読みづらさを感じるかもしれないが，村上・佐藤・野澤・稲葉 (2016) がよく，一冊手元に置いて演習をしながら進めると良い。

7 行列による関係の表現

7.1 授業内容

7.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

線形代数についての基礎的なルールを習得する段階である。今回はより実践的・具体的に，データ行列をどのように線形代数で表現できるかを考える。データ行列から分散共分散行列，相関行列へと形を変えることを学ぶ。つづいて線形モデル，とくに従属変数が明確な回帰分析モデルを行列で表現することを見，線形モデルとデザイン行列について考える。さらに因子分析モデルを行列で表現することを考える。行列で表現することで，1 つの式の中に第一，第二定理の両方を含んだ形で表現できることを理解する。

7.1.2 コマ主題細目

データの行列表現 実際に手にするデータセットは，表計算ソフトウェアの画面で見る行列形式の数列であるが，これを記号で表現することで一般的に扱うことができるようになる。添字に気をつけながら要素ごとの表示をすることに加え，行列の計算をこのデータ行列に与えることによって，変数の平均や変数ごとの平均偏差を持った行列が表現できる。平均偏差行列を用いると，行列の積の特徴から分散と共分散を含んだ正方行列が作られることがわかる。また，データを標準化することで，標準化された行列の積が相関行列を表すことになる。このように一般的に表現するために，これまでの行列計算の方法が作られたのだと逆算的に理解すること，加えて行列のサイズに注目しながら，扱うデータの大きさがイメージできるようになることが肝要である。

→ 岡太 (2008) の Pp.77-110

線形モデル 行列表現の利便性は，データの変換だけにあるのではなく，統計モデルを表現する際にも生きてくる。基礎で学ぶ線形モデルは，基本的にエレメントワイズな表記法であったが，行列を使うことで単回帰も重回帰も同じ式で表現できることがわかる。このように表記の統一性があることが，線形代数の利点である。また統一的な表記にするために，切片項にかかる列を追加するなどの工夫をすることにも注意する。これらの点は，R など統計ソフトウェアを扱う上でもヒントになることが多い。

デザイン行列 基礎の段階で行った帰無仮説検定は，説明変数が離散変数であったことから，線形モデルの特殊形に過ぎなかったことを再確認する。その上で，先の回帰分析を行列表記にしたように，離散変数で説明する時の係数にかかる行列の形を確認する。この行列はとくにデザイン行列と呼ばれること，また自由度の関係から制約を加えた表現になるが，それがデザイン行列の中でどのように書き表されるかを確認する。

→ J.Dobson (2008) の Pp.41–45 にごく簡単な紹介が，豊田 (2000) の Pp.47–62 には計画行列として構造方程式の枠組みで説明されている。

因子分析モデルの行列表現 因子分析モデルはここまでエレメントワイズで表現されていたが，同様に行列表現にするとどのようになるかを確認する。とくに行列のサイズに注目することが重要である。というの

も，統計ソフトウェアを使っていると因子得点が表示されないことが少なくないが，行列の形で見ると因子負荷量は項目数 $\times$ 因子数，因子得点は回答者数 $\times$ 因子数になることがより意識されやすいからである。他にも因子分析に関する特徴量が行列のどの要素にはいっているか，また因子分析の定理が行列のどこで表現されているかを確認することが重要である。

因子分析の行列的表現については → 芝 (1979) が良書だが，現在は絶版。同様の内容は小杉 (2018) にもある。

7.1.3　キーワード

- データの行列表現
- 分散共分散行列，相関行列
- デザイン行列

7.2　授業情報

■コマの展開方法　講義

7.2.1　予習・復習課題

■予習　行列の掛け算がメインになってくるので，計算方法並びに計算結果のサイズを確認する方法を見ておこう。

■復習　行列表現によって重回帰方程式が 1 つの形になることを確認する。平均値の差を見るために線形モデルが用いられることを確認する。また因子分析モデルを行列表現すると，一気に 2 つの定理が 1 つの式で表現できることを確認する。

8 固有値と固有ベクトルと因子分析モデルの関係

8.1 授業内容

8.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

因子分析モデルを行列表現することで，いよいよ因子をどのように算出しているのかについての答えが明らかになる。

因子負荷量を算出するためには，線形代数でいうところの固有値についての理解が必要である。まずは固有値と固有ベクトルを導入し，どのように計算するかを見る。とくに固有ベクトルはノルムが定まらないことを確認する。そこから，固有値と固有ベクトルがどのような性質を持っているかを幾何学的観点から確認する。正方行列が座標変換を行うためのものであると考えれば，固有ベクトルは変換行列の基底となることがわかるだろう。データ解析にあたって，相関行列の基底を求めるとはどういうことかをイメージするだけでも，因子分析の理解がまた一歩深まるだろう。

8.1.2 コマ主題細目

固有値と固有ベクトル 行列の固有値と固有ベクトルの性質を理解する。直感的には，正方行列がスカラーに変わることが，情報圧縮になっていると言えるだろう。また，行列のサイズと同じ数だけ固有値が見つかること，固有値の総和が元の行列のトレース trace になることを確認する。とくにデータ解析の領域では，分散共分散行列か相関行列が分析対象になることが基本であり，こうした対称行列の固有値は実数になること，相関行列のトレースは項目数と合致することを改めて確認することで，データの情報圧縮になることについての直感的理解をめざす。

固有ベクトルを求める 2×2 行列を例に，固有値と固有ベクトルを求める計算を行う。固有方程式を導入し固有値の計算を行うことは比較的簡単であるが，固有ベクトルの求め方が直感的にはわかりにくい。というのも，固有ベクトルはその大きさが定まっておらず，要素同士の相対的な大きさを示すだけだからである。ここでベクトルのノルムを導入して標準化解を算出することを確認する。また行列のサイズが大きくなると方程式が高次になるため，一般解が得られないこと，結果的に近似解を求める計算方法が開発されていることをみる。

固有値と固有ベクトルの幾何学的意味 正方行列は一次変換行列であり，固有ベクトルはその基底であることを単純な行列から理解する。固有ベクトルはノルムが定まっていないこと，すなわち方向性だけを持ったものであることを理解する。また固有値はその総和が元の行列のトレースと一致することから，分散あるいは項目数 (相関行列の対角) を組み替えたものであり，固有値の大きさの順に考えることはすなわち，より明確な次元を抽出したことになることを確認する。

→ これについては平岡・堀 (2004) にアニメーション付きで説明されているのがわかりやすい。また長沼 (2011) は固有値の章だけでなく，付録を読むとまた固有値と固有ベクトルの多角的な理解が進む。

因子分析モデルの意味 因子分析モデルは相関行列を固有値分解することであり，それはすなわち相関行

列の中にある基本的な次元・座標を求めることにある。すなわち複数人の反応パターンの共通要素を取り出すということであり，これは心理学的アプローチをほぼ直接的に数学表現したものであることを理解する。座標の回転についても触れ，仮定を緩めた場合の表現も理解する。

8.1.3 キーワード

- 因子分析モデルの行列表現
- 固有値
- 固有ベクトル
- 固有ベクトルの幾何学的理解

8.2 授業情報

■コマの展開方法　講義

8.2.1 予習・復習課題

■予習　因子分析の基本モデル，第一・第二定理の導出を復習しておこう。

■復習　因子分析モデルが何をやっているかを考えた上で，心理学における尺度の利用やその解釈においてどのような注意をしなければならないかを言語化してみよう。

9　R をつかっての行列計算

9.1　授業内容

9.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

行列の計算は単純な計算ではあるが，要素の数が多くなるので反復回数が増え，また計算の法則も慣れるまでは難しい。人間にとってはミスが多くなりがちなこの計算が，計算機 (コンピュータ) は最も得意とするところである。計算機は疲れることなく，単純な反復計算を瞬時にこなす。多変量データ解析は計算機の発展の歴史とともにあり，昨今の計算機パワーは非常に複雑な統計解析も瞬時に答えを出すようになった。

この行列計算は表計算ソフトにはできないことであり，統計環境 R のような，統計パッケージを利用することになる。本項では，統計環境 R を用いて行列の基本的な計算を演習によって習得することを目的としている。また R で行列の計算ができることは重要ではあるが，実際に統計分析をする時にはより便利なパッケージを利用することになる。心理学関係の数値計算については，`psych` パッケージが便利である。これを導入し，記述統計量や信頼性係数など基本的な分析が便利になることを確認する。

9.1.2　コマ主題細目

R による行列計算　R についての基本的な使い方 (環境の準備，RStudio によるプロジェクト管理，パッケージの導入，基本的な四則演算等) については習得済みであることを前提とする。行列計算にあたっては，データをマトリックス型で保持している必要があり，また行列の計算は四則演算と異なること，ベクトルの長さが時には再利用されることなど注意が必要な点がある。それらを踏まえて，データの方を考えながら行列の四則演算を確認する。

R によるデータの変換　R の行列計算を使って，前時までに行った raw data の変換計算，すなわち平均，平均偏差行列，分散共分散行列，相関行列などの計算プロセスを確認する。また，`cov` や `cor` 関数を使うとこれらが一気に計算されるが，分散の関数には不偏分散が用いられていることに注意する必要がある。

R による固有値計算　R の `eigen` 関数を使って，固有値と固有ベクトルが計算されるところを確認する。固有ベクトルは標準化されていることに注意する。

9.1.3　キーワード

- 行列型
- 行列関数

9.2　授業情報

■コマの展開方法　R を使った演習

9.2.1 予習・復習課題

■予習 R/RStudio を使った分析環境を再確認しておこう。またデータの読み込みや記述統計量などの算出関数を確認しておこう。

■復習 授業時間内に収まらなかったところがあれば，必ずキャッチアップしておくこと。いくつかの練習問題を実践し，エラーや警告がでても対応できるようになろう。

10　R をつかった因子分析と尺度作成法

10.1　授業内容

10.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

ここでは心理尺度を開発するような心理学研究を想定し，より実践的な順序に則って演習を進めていく。この講義の目標は，自らが質問紙調査を使った研究をした場合にどのような手順で行うかを理解し，実践できるようになることである。具体的には前回導入した `psych` パッケージを用いて，さまざまな推定オプションを追加していくことで出力が変わっていくことを確認しながら進める。

10.1.2　コマ主題細目

psych パッケージ概説　心理学研究に用いられる便利な関数群である `psych` パッケージのマニュアルを見ながら，`describe.by` などの記述統計量関数，`alpha` や `omega` といった信頼性係数の関数を使ってロウデータの分析を行う。

調査研究の手順　心理尺度の作成研究の手続きを外観する。まず構成概念の設定，定義，妥当性を考えた上で，具体的な項目を選出し，テストデータを取る。探索的な因子分析によってその因子的妥当性を確認し，標準化のための本調査を行う。あるいは 1 次元性を確認した上で，IRT によって反応段階の確認，項目母数の確認，テスト情報関数の確認などが必要である。尺度の翻訳や検証的妥当性のチェックなどについては，構造方程式モデリングによる分析を行うのでここでは扱わず，参照するにとどめる。

共通性推定の問題　分析にあたって，改めて因子分析モデルの行列表現を提示し，行列の固有値分解によって因子負荷量が求められることを確認する。しかしその際，共通性をどのように推定するかの問題が残されていたことを確認し，そのためにいくつかの方法が提案されていることを理解する。これらは因子分析を行う上で，推定方法のオプション指定に関わってくる点であり，ソフトウェアが変わっても同様の指標が必要であることをみる。

→ 小杉 (2018) の Pp.91–94.

fa 関数と探索的因子分析　探索的因子分析の手続きを `fa` 関数を使いながら考える。探索的因子分析の場合は因子構造，因子負荷量について何ら前提を置かないため，因子数の推定から始めなければならない。まずは `fa.parallel` 関数でスクリープロットを描画する。スクリープロットを読むときの形状について確認する。続いて因子数と共通性推定方法を定めた上で `fa` 関数を実行し，因子負荷量や共通性などアウトプットを確認する。続いて解釈を簡単にするために因子軸の回転を行うことを解説し，実行のために `rotate` オプションを追加することをみる。回転前の結果との比較，また直交回転と斜交回転の違いを確認する。

→ 小杉 (2018) の Pp.81–91.

因子得点の算出　因子数と因子負荷量が明らかになると，そこから逆算的に因子得点を計算できる。`fa` 関数には `scores` オプションをつけることで，出力されたオブジェクトから因子得点を取り出すことができるのをみる。こうした方法とは別に，項目同士の素点の平均から因子得点を計算することもある。これは推定値を実体とすることの懸念が出発点であり，その長所と短所を把握しておくことが必要である。この簡便法は平均値情報を含んでいるため，尺度カテゴリに依拠した解釈が可能である。また取り出された因子得点と簡便的因子得点の相関を見ることを確認する。

因子分析の注意点　因子分析を行う上で注意しなければならないのは，因子が実体としてあるのではなく，あくまでも準備された項目群の相関関係から得られる基底に過ぎないことを理解する点である。因子分析の流れの中では因子に命名することが 1 つの手順としてあるが，言葉として確定するとあたかもそれがあるかのように考えられてしまうこと，それしかないように考えられてしまうことの危険性を理解する。心理尺度の呪いやてっちゃんの手品になってしまわないように注意し，常に元の項目群に戻って考える必要があることをしっかりと理解する。

10.1.3　キーワード

- 信頼性係数
- 共通性
- 因子負荷量
- 因子得点
- `psych` パッケージ
- `fa,fa.poly,fa.parallel` 関数

10.2　授業情報

■コマの展開方法　R を使った演習

10.2.1　予習・復習課題

■予習　パッケージの読み込みや関数の結果を見る方法を確認しておこう。一年時のことを思い出して，`lm` 関数を例に R の操作方を思い出しておく。

■復習　授業時間内に収まらなかったところがあれば，必ずキャッチアップしておくこと。いくつかの練習問題を実践し，エラーや警告に対応できるようになろう。心理学研究など心理学の専門雑誌を参考に，どのような分析結果がどのように報告されているかを確認しておくことも，理解を進める。

11 R をつかった項目反応理論

11.1 授業内容

11.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

項目反応理論を実践的に理解する演習パートである。

カテゴリカルな因子分析と数学的に同等ではあるが，より項目の特徴を広く表現できる項目反応理論の利用が，今後より重要なものになってくるだろう。

ここではまずテスト理論の根本に立ち返り，二値単因子のデータを使って 1PL,2PL モデルの分析を行う。分析結果は数値で見ることも重要であるが，ICC や IIC，TIC などを使って可視化するとより理解が深まるだろう。多段階の反応についても，同様に GRM を実行し，閾値や識別力，IRCCC や IIC，TIC が描画できることを確認する。とくに IRCCC による反応段階の読み取り方には注意する。最後に多段階で多因子の場合，項目反応理論の文脈から言えば多次元 IRT になり専用のパッケージが必要になることを紹介しつつ，カテゴリカル因子分析でも同様のことができることを確認する。

11.1.2 コマ主題細目

項目反応理論の実際 項目反応理論はテスト理論がその出自に当たるので，まずは二値データで単因子が想定できるような例を元に分析を行う。分析には `irtoys` パッケージや `ltm` パッケージを用いて，1PL モデル，2PL モデルの演習を行う。項目母数の値と意味が，具体的な設問に照らし合わせて考えることで，より実感をもって理解できるようになると思われる。とくに，ICC や IIC,TIC など可視化することでその意味が理解しやすくなるだろう。3PL モデルなどさらに拡張したモデルも利用可能である。

段階反応モデルの実際 続いて単因子，段階反応モデルの実践を行う。因子構造として，前回の授業で扱った多因子の内，ある因子に限定して分析を行うこととする。段階反応モデル (GRM) の出力結果を数値だけでなく可視化することで，項目の特徴がどのように表現されているかを考える。とくに反応段階の山が潰れているようなケースは，適切な反応段階でなかったことを意味するので，数値の置き換えなど元データを修正しつつ分析し直すことを考える。これらを通じて，適切な反応段階による調査法が必要であることを理解する。

カテゴリカル因子分析との対応 多段階，多因子の場合は `psych` パッケージの `fa` 関数にオプションを追加することでできる，カテゴリカル因子分析と同じである。出力結果について，これまでの相関係数を用いているものとの違いを確認する。また数値をどのように変換すれば対応するのかを見ることで，数学的に等価であることを確認しておく。IRT の側面から多因子に拡張した，多次元 IRT についても，`mirt` パッケージを利用すれば実行できる。この解析には計算時間がかかるが，完全情報最尤推定の結果が得られることは利点である。

11.1.3 キーワード

- 1PL モデル，2PL モデル，3PL モデル

- 段階反応モデル
- カテゴリカル因子分析
- `irtoys,ltm,psych,mirt` パッケージ

11.2　授業情報

■コマの展開方法　R を使った演習

11.2.1　予習・復習課題

■予習　`irtoys,ltm` パッケージを事前にインストールして環境を整え，データファイルの読み込みなど R/RStudio の基本的な使い方を確認しておこう。とくに R の `data.frame` 型に含まれる変数が，`numeric` なのか `factor` なのかによって挙動がかわることがある。変数の型についても再確認しておこう。

■復習　本講で習ったパッケージを使って，具体的なデータを因子分析，IRT，カテゴリカル IRT などいくつかのモデルで分析し，それぞれの違いを確認しておこう。

12 構造方程式モデリング

12.1 授業内容

12.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

構造方程式モデリングは，因子分析と回帰分析を統合して扱う，総合的分析モデルである。言い換えれば，これまでの多くの多変量解析モデルのほとんどは，構造方程式モデルの下位モデルとして表現できる。ここではこれまでのモデルを統合した，より現代的でより上位のモデルである構造方程式モデリングを理解することで，すべての多変量解析を網羅的かつ俯瞰的に捉えることが狙いである。

構造方程式モデリングを理解するには，変数の種類と関係性の区分に注意したパスダイアグラムの描き方を知ることが早い。パスダイアグラムを用いると，回帰分析と因子分析は説明変数が観測変数なのか潜在変数なのかといった違いであることが明らかである。また因子分析と似た主成分分析がどのように表されるかも，パスダイアグラムを見れば一目瞭然である。

パスダイアグラムには変数の尺度水準までかきこまれることはないが，ここに注意していろいろなモデルを描画すると，それがかつて多変量解析においてさまざまな名称で呼ばれた分析方法であったことがわかる。あるいは，今後どのようなモデルが開発される可能性があるか，どのようなモデルをどのように希釈すれば良いかもイメージできる。

加えてこの統合的なモデルがなぜそうした複雑なモデルを表現できるのかについても，モデルを方程式で描画し，行列で考えることで，モデル行列とデータ行列を近づけることと理解できる。この観点から，データにモデルを当てはめる適合度の考え方が改めて理解されるだろう。

12.1.2 コマ主題細目

パスダイアグラムの書き方　これまで学んできたモデルを図で表現することを学ぶ。そのためには，変数を観測変数と潜在変数に区別することと，変数間関係を因果関係と相関関係に区別する必要がある。観測変数を矩形，潜在変数を楕円形，因果関係を一方向矢印，相関関係を双方向矢印で表現することで，因子分析や回帰分析が図で表現できることを学ぶ。

パスダイアグラムによるさまざまなモデル　因子分析と回帰分析をパスダイアグラムで表現したことで，この両者を統合するような表現ができること，また潜在変数同士の関係を記述する，構造方程式を描画できるようになったと言える。因子分析と似た手法とされる主成分分析や，尺度水準の違いによるさまざまな統計モデルを表現する方法を手に入れたことになる。この手法を総称して，構造方程式モデリングと呼ぶ。

→ 小杉・清水 (2014) の Pp.7–10

構造方程式モデルによる未知数の推定　構造方程式モデリングでは，パスダイアグラムでも表現されるが，変数間関係を方程式で書くこともできる。方程式で描画することで，構造方程式も潜在変数の方程式と観測変数の方程式，それらが入れ子になった方程式で描画できることがわかる。またこれらのモデルを行列のイメージで捉えると，最終的には分散共分散行列という実態を持った数字に対して，未知

数で描画された方程式を接続したことが直感的にわかるだろう。未知数の増え方と分散共分散行列の要素の増え方を比較すると後者が圧倒的に早く，未知数よりも既知数が多い方程式は解くことができるという原理から，未知数が推定しうることを理解する。

→ 小杉 (2018) の Pp.191–193.

適合度によるモデルの評価　データ行列とモデル行列をイコールで結んだ方程式を解くことが，未知数を求める根本的な原理であるが，このことからモデルがデータとどの程度合致しているかという適合度が，モデル評価の統合的観点として浮かび上がってくる。回帰分析では R^2 であったが，因子分析をはじめとしたさまざまな多変量解析モデルも，この評価次元で考えることができる。ただしその指標にはいくつかの特徴があり，これらを総合的にみて評価するという実践的ノウハウも確認する。

→ 小杉・清水 (2014) の Pp.10–12

12.1.3　キーワード

- パスダイアグラム
- 観測変数と潜在変数
- 因果関係と相関関係
- 構造方程式モデリング
- 適合度

12.2　授業情報

■コマの展開方法　講義

12.2.1　予習・復習課題

■予習　回帰分析と因子分析という 2 つの分析方法についてはすでに学んでいるが，この両者の共通点と相違点がどこにあるかを事前に考えてみよう。外的な基準の有無，説明変数の種類の観点から，自分の言葉で表現できるようになっていると良い。

■復習　これまで学んださまざまな統計モデルを，構造方程式モデリングの表記法に則ってパス図を書いてみよう。またさまざまな尺度水準の組み合わせからなるモデルを考え，それらがどのような意味を持つのかと推論するのも理解の助けになる。

13 R による構造方程式モデリング

13.1 授業内容

13.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

これまでの流れと同じで，統計技術の理論を知っただけではなく，自分で実際に計算できる演習を経てこそ理解が深まるということから，本講では R をつかって実際に構造方程式モデリングを解くことを演習的に学ぶ。構造方程式モデリングを実装するパッケージは複数あるが，最も応用範囲がひろい `lavaan` パッケージを用いることにする。

まずは観測変数だけからなる簡単なパス解析を行う。データの入力の仕方，方程式の設定，関数の使い方などを一通り習得する。続いて潜在変数を含んだモデルによる解析を行う。モデルの適合度や修正指数を参考に，徐々にモデルを書き換えていく手順を学ぶ。注意すべきは，適合度を上げることが目的になって，不自然な仮定やパスをおいてしまうことである。あくまでも具体的かつ妥当なモデリングを心がけるべきである。

オプショナルな設定になるが，観測変数がカテゴリカルである場合や，推定方法の選択なども確認する。最後に，R 以外の統計パッケージによる構造方程式モデリングの実践例がいくつか紹介される。

13.1.2 コマ主題細目

方程式の入力 まずは観測変数同士の関係をパスでつなぐモデルで練習する。パス解析は回帰分析の繰り返しで実行することもできるが，構造方程式モデリングによってパスの繋がりを 1 つのモデルで表現し，適合度も統一できるなどの利点がある。観測変数だけからなるモデルの結果と，実際に `lm` 関数で実行した結果と比較すると良い。またパッケージにもよるが，自動的にパスダイアグラムを描画してくれるものもある。方程式とそのパスダイアグラムによる表現の対応を確認する。

→ 小杉・清水 (2014) の Pp.55–60

測定モデルの実践 因子分析モデルを SEM 上で実行してみる。探索的因子分析と違い，どの項目にどの因子が影響しているかを固定したモデリングが可能であり，この検証的因子分析による結果と，いわゆる因子分析関数との結果を比較することで，パスが引かれていないところはその係数が 0 であるという強い仮定をおいていることを確認する。また尺度作成の観点からは，検証的因子分析をすることで因子的妥当性や弁別的妥当性，収束的妥当性を検討することもできる。さらに同じモデルを別のデータに適用することで多母集団同時分析を行うことになる。このように，モデルの暗黙の過程や，モデルとデータの適合という側面にとくに注意する。さらに測定モデルと測定モデルをつなぐ，構造方程式を扱ったモデルへと拡張する。

→ 小杉・清水 (2014) の Pp.87–90

実践上の注意点 ここまでを通じて，一通りモデルを作成できるようになった。とくに構造方程式を踏まえると，心理的実体同士の関係を描画したと解釈できるため，心理学的概念間の関係を記述できることは魅力的に映るかもしれない。しかしデータを越えての解釈はご法度であり，潜在変数が心理的実在で

あるかどうかの議論は，理論的背景や測定の適切さ，標準化されないスコアが実際にどのように変化すれば何が言えるのか，といったところに一足飛びに行かぬよう注意する必要がある。またモデル改良のステップにおいて，適合度や修正指数を過度に参照していないか，注意する必要がある。

そのほかの統計パッケージ　構造方程式モデリングの利点は，モデルを可視化したことにもある。たとえば AMOS は GUI でモデルを作成できる。他に Mplus はカテゴリカルな変数にも対応しているし，高度に複雑なモデルであっても表現が可能である。

13.1.3　キーワード

- 測定方程式
- 構造方程式
- 潜在変数を含んだモデル
- 多母集団同時分析
- 適合度

13.2　授業情報

■コマの展開方法　講義

13.2.1　予習・復習課題

■予習　構造方程式モデルは，数式レベルでの理解は難しいが実際は統合的なものであり，回帰分析や因子分析をその下位モデルとして含んでいる。改めて，回帰分析や因子分析を単体で行った場合にどのような出力がなされるのか確認しておくと，同じものを構造方程式で実践したときの違いが明確に意識できるようになる。

■復習　さまざまなモデルを試すなかでは，エラーや警告が出ることもある。そうしたエラーや警告の意味を理解し，またそれに対応するためにはどのような方法が取れるかを考える必要がある。まずは手元のデータを用いて，これらの練習を行うと良い。

14 多次元尺度構成法

14.1 授業内容

14.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

数量化まで学ぶことによって，カテゴリに適切な数値を割り振るという尺度化の原点に立ち返ることができた。ここではさらに，心理尺度のような回答法ではない変数間同士の関係から，次元を取り出して分析する多次元尺度構成法について考える。この方法は実験刺激や知覚的反応，直感的判断などを対象にできるため，応用可能性が非常に高いだろう。

多次元尺度構成法を理解するためには，まず実際の距離行列を分析して地図を再構成できるかどうかを見るところから始めるのが良いだろう。データとして与えられるのが距離行列であり，行動計量学ではこれを心理的な距離や意味的な距離が数値化されたものだと捉えることで，心理学的な地図を作っていると解釈してきた。この仮定には最大限の注意を払いつつ，必ずしも計量的でない場合の数値化をする非計量的多次元尺度法に拡張することで，更なる心理学的用途が広がることを見る。なお，多次元尺度方は数量化 IV 類と同じである。

多次元尺度法は分析の元が距離行列であり，その基底を固有値分解によって得るといういみで，多変量解析としてはお馴染みの考え方であるともいえる。しかしデータが距離 (を意味するもの) であれば良く，数学的にも簡単な拡張をすることで，個人差を表現するモデルに拡張することもできる。また心理尺度に対する考え方として，個人の内的な次元からの近さに応じて反応すると考える，展開型のモデルを使うことは，心理尺度の利用に新な視点をもたらす。

14.1.2 コマ主題細目

多次元尺度構成法 多次元尺度構成法 (MDS) は，距離行列を元にした多変量解析の一種であり，距離関係から次元 (基底) を選び出し，対象に座標を与える方法である。まずは座標の復元例から考え，抽出する次元数をどのようにして求めるかといった基礎的な知識を得る。また，行列の考え方からみると正方対称行列の固有値分解であるから，これを確認するだけでも他の多変量解析と合わせた統合的な理解ができるだろう。因子分析モデルも多次元尺度法の一種であるということもできる。

距離と心理学のデータ 距離行列があれば次元が抽出できることが分かったが，さて何を距離とみなすかを考えれば，非常に多くの可能性が広がることがわかる。距離の定義は非負で対称性と三角不等式が成り立つことであり，さまざまな距離の定め方があるし，共分散や相関もその一種と考えることができる。元になるデータも尺度評定を用いる方法，刺激の混同率，代替価/連想価，刺激の汎化勾配，反応潜時，ソシオメトリックなデータなど，心理学のさまざまな領域で得られるデータが，距離とみなすことができる。応用可能な領域が広いことを知ることで，統計モデルをハンドリングできることになる。

→ データの例に関しては高根 (1980) の Pp.14–27.

非計量多次元尺度法 計量 MDS によって算出される座標は元のデータをうまく復元するが，心理学的なデータの場合はデータの大小関係の表現 (順序尺度水準) がせいぜいであり，これに対応した非計量

多次元尺度法が考案されている。この手法を用いることで，一対比較や順序比較などのより制限の少ないデータからであっても数量関係を導き出すことができる。

→ 計量・非計量多次元尺度構成方については，すでに絶版になったが岡太・今泉 (1994) がもっとも簡潔でわかりやすく説明している。手に入るところでは足立 (2006) の P.135–143，あるいは小杉 (2019) の P.199-203.

多次元尺度構成法の展開　多次元尺度構成法で作られたものは地図である。地図には点を書き込んだり，複数の地図を重ねたりできるように，多次元尺度法で得られた地図にも情報を追加したり，モデルを展開するなどしてさまざまな応用的モデルを作ることができる。ここでは Prefmap や楕円モデル (非対称 MDS)，INDSCAL など応用例をいくつか示し，この技術の応用可能性を考える。

展開法　Coombs が考えた心理尺度の展開法は，サーストン法やリッカート法とはまた別の尺度化の考え方を表している。この方法は被験者とカテゴリーの両方を地図上にプロットできる。具体的な分析例をみながら，尺度やそれに数字を与える方法についての考え方を見る。

→ 展開型モデルについては，多少複雑な工夫が組み込まれているが，清水 (2018) が参考になる。

14.1.3　キーワード

- 多次元尺度構成法
- 非計量多次元尺度構成法
- 個人差多次元尺度構成法
- 展開型多次元尺度法

14.2　授業情報

■コマの展開方法　講義

14.2.1　予習・復習課題

■予習　数量化の関係を再確認しよう。すなわち数値に値を与えるというものであり，尺度のカテゴリだけでなくより一般的な心理的刺激を考え，どういったモデルで表現できるかを考えると本講だけでなく後期の授業にもつながる気づきを得るだろう。

■復習　多次元尺度法によって，どのような分析ができるかを考えてみよう。とくに尺度法にかかわらず，実験刺激からの反応を距離と見做せる関係にすれば分析でき，その結果をどのように解釈するかについても自由度はかなり多い。紹介された発展的なモデルなどについても自分の研究関心にどのように応用できるか考えてみよう。

15 プログラミングの基礎

15.1 授業内容

15.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

後期の授業の主眼は「データから意味のある情報を取り出す」ことにある。すなわち，これまでのデータ駆動型 (Data Driven) な発想を逆転し，データがどのように生成されたと考えるかという観点から，データ生成モデル (Data generating Model) による理解を試みる。

モデルは数学的表現がなされ，モデルの形成やデータとの照合 (fitting) には計算機の利用が必須である。後期の初回となる今回の目的は，プログラミングの基本的な考え方を身につけ，次回以降の本格的な運用に備えることである。プログラミングの基礎はコマンドによる命令であり，コマンドの書き間違えはエラーとなって帰ってくる。一見不親切に思えるが，即時反応により学習の効率は良く，コード補完機能などを用いることで簡単なミススペルは回避することができる。小さなものから大きくしていくこと，1 行ずつ実行することなど，基本的な姿勢についても理解する。

またプログラミング言語 (高級言語) はいくつかあるが，文法的な違いを除けばその本質は代入，反復，条件分岐である。この三点について理解し，基本的な書き方を学ぶ。実際に R でコードを書きながら，その挙動について確認する。最終的な到達段階として，Fizz-Buzz 問題や行列計算ができるコードを書くこととする。

15.1.2 コマ主題細目

プログラミングの基礎 プログラミングにあたって重要なことは「思った通りに」動くのではなく，「書いた通りに」動くことである。ミススペルや大文字小文字の違いにも注意が必要である。コードのスペルチェックや補完機能を活用し，また 1 行ずつ確認しながら進めるといったプログラミングに関わる基本的な心構えについて理解する。

いくつかのプログラミング言語 R はプログラミング言語の一種であると言っても良い。プログラミング言語には他にも Python や Basic，C 言語などがある。これらの基本的な関係について理解するとともに，コンパイラとインタプリタという実行形式の違いについても理解する。この違いは今後確率的プログラミング言語を利用する際の知識として生きてくる。

高級言語の基本的な働き 高級言語と呼ばれるプログラミング言語の基本的な働きは，代入，反復，条件分岐である。R では`<-`や`=`で代入を，`for` や `while` で反復を，`if` や `if_else` で条件分岐を行う。これらの表現は言語間を通じて共通なものが多いため，その基本的な振る舞いを確認することは技術の一般化に役立つ。

15.1.3 キーワード

- プログラミング言語
- コンパイル
- 代入
- 反復

- 条件分岐

15.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔/演習

15.2.1 予習・復習課題

■予習 事前に環境の準備をしておく必要がある。環境の準備についてはいくつかの方策があり，これについては導入資料を参照しながら準備しておくこと。なお，環境準備中に問題が生じた場合はいち早く教員かTA に相談し，実行できるようにしておくこと。

■復習 反復計算の練習課題，条件分岐の練習課題など，複数の課題にしっかり取り組むこと。

16 データ生成メカニズムとモデリング

16.1 授業内容

16.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

モデリングアプローチには実質的にベイズ推定が必須であり，そのためにはまず推定法としてのベイズ法の位置付け，ベイズの定理の基礎，実践的方法としての MCMC 法について理解する。とくに，従来の心理統計ではモーメント法と最尤法に言及されるにとどまるものが多い。確率モデルとしての表現は最尤法から導入されており，尤度による推定を事後分布という確率分布で表現するようになったものとして，ベイズの定理を位置付けると良い。MCMC 法は新しい方法であるが，その前に確率分布の特徴を記述するために乱数を利用することができる，という事実を確認すれば，事後分布の記述との相性の良さも明らかである。このように，ベイズ法を過度に新規でまったく異なるものであるという印象を与えることなく，従来の方法の延長線上にあるものとして考えられるようにする。

16.1.2 コマ主題細目

データ生成モデリング 推測統計学が母集団分布における仮定から母数を推定することを目的とし，モーメント法，最尤法，ベイズ法といったアプローチで推定を行うものであったことを再確認する。その上で，帰無仮説検定など心理学一般で使われているモデルは得られた結果のみに基づいてモデル比較をする形である。これは客観性を重視しデータにいかなる前提も置かないことを考えてのアプローチであり，いわばデータ駆動型の分析方法である。これに対して，データがどのように生まれてきたかを考え，その仕組みに基づいて分析する方法がデータ生成モデリングである。データ駆動型分析法は実験方法にそのメカニズムを埋め込んでおり，データ生成モデル駆動型分析法はメカニズムそのものを検証する形になっている。

→ 松浦 (2016) の Pp.18–25.

ベイズ推定の基礎 データ生成モデル駆動型分析にあたっては，未知なるパラメータが多くなるため，実質的にベイズ推定を使うことになる。ベイズ推定の原理となる確率やベイズの公式を再確認することが必要である。

→Kruschke (2014) の Pp104–123 ほか枚挙に遑がない

MCMC ベイズ推定は事後分布を用いて分析結果を考えることになり，これは結果がパラメータの確率分布として得られることを意味する。そこで確率分布を分析する方法として，乱数を用いてアプローチすることを考える。乱数を用いるアプローチの利点は，積分計算が記述統計量で済むこと，周辺化分布についても当該変数について考えるだけで済むこと，精度を上げる時にサンプル数を増やすだけで良いことなどが挙げられる。また乱数を用いるアプローチに対応したソフトウェアとして JAGS や Stan が挙げられる。これらが確率的プログラミング言語が乱数発生機であることを踏まえ，簡単な実践を行ってみる。

→Kruschke (2014) の Pp.147–194.

乱数によるアプローチの例 簡単な確率分布を使って，乱数によるアプローチを実践する。サンプルサイズを増やすことで精度が上がること，記述統計量が確率分布の特徴を記述することを再確認する。とくに平均値，中央値，パーセンタイル，分散や標準偏差など，分布の要約統計量の計算について，R スクリプトで算出できるよう練習する。

16.1.3 キーワード

- データ生成モデリング
- ベイズの定理
- マルコフ連鎖モンテカルロ法
- 乱数による近似

16.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔/演習

16.2.1 予習・復習課題

■予習 環境の準備が整っていないものは，急ぎ準備を行うこと。また 1 年次の心理学データ解析基礎において，確率分布や乱数を用いるアプローチについても言及はしているので，振り返って「確率という数字の公理」を確認しておくことが望ましい。

■復習 R を用いて乱数を発生させ，理論上の値の近似値になることを確認する。正規分布，ベルヌーイ分布，二項分布，ポアソン分布など複数の既存関数を確かめることで，一般化されない事後分布についての乱数発生機が手に入ったことの重要性に気づくことができるだろう。

17　ベイジアンアプローチと確率的プログラミング 1

17.1　授業内容

17.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

ベイズ推定によるモデリングアプローチを始めるにあたって，比較的親近性の高い正規分布を用いた例を導入する。とくに分散/標準偏差に個人差を入れるモデルを用いることで，平均値以外にも推定モデルが考えうることから，モデリングの対象とする領域の広さを意識させる。また確率的プログラミング言語を用いた初の演習でもあるから，コードの書き方，コンパイルなどの手順，出力結果の診断と解釈など，今後の分析に必要な技術的要素についても確認する。

17.1.2　コマ主題細目

7 人の科学者　Lee and Wagenmakers (2013) より「7 人の科学者」の例を紹介する。この例の利点として次の 3 点がある。1. 正規分布を用いていること，2. 平均値以外のパラメータを用いていること，3. 小サンプルからの推論であり，ごく簡単なコードで実演できること。カバーストーリからモデルを想像し，コードに落としていくプロセスをたどりながらモデリングの実際を学ぶ。

→Lee and Wagenmakers (2013) の Pp.48–50.

Stan コードの書き方　カバーストーリーに沿ったモデル図 (設計図) ができれば，後は Stan の言語仕様にそって記述していくだけである。ブロックによる分割，セミコロンによる一行の終わり，変数の宣言と利用など言語仕様を外観したあとで，モデルブロックからパラメータ，データと逆順に書いていく書き方を試す。尤度と事前分布の違いにも注意し，コメントをつけながらコードを書いていく。

Stan を使った MCMC の実践　Stan コードは Stan ファイルに記載し，コンパイルは Stan そのものを用いるものである。これらファイル，インターフェイス (パッケージ)，実行エンジンなどの関係を明らかにしつつ，MCMC について学ぶ。

→Kruschke (2014) の Pp.407–425.

MCMC の結果の診断　MCMC の結果は Stanfit オブジェクトとして得られるが，それがどう言った情報を持っているか，また MCMC の代表性，正確性，代表性など確認すべき点について理解する。

→Kruschke (2014)Pp.180-194

MCMC の結果の解釈　事後分布からの代表値として適切な MCMC 結果が得られたら，それを用いて結果の解釈を行う。結果はすべて分布として得られているので，確率分布をどのように代表するかについて，前時の復習をしながら進める。また複数のパラメータの同時分布で結果が得られていること，すなわちあるパラメータの点推定値の組み合わせが，同時分布の適切な代表になっていない可能性にも注意が必要である。

同時分布については →Lee and Wagenmakers (2013) の Pp.42–46.

17.1.3　キーワード

- 精度のモデリング
- Stan
- data ブロック，parameters ブロック，model ブロック
- Rhat, 有効サンプルサイズ
- EAP，MAP，MED
- 同時分布

17.2　授業情報

■コマの展開方法　講義/遠隔/演習

17.2.1　予習・復習課題

■予習　Stan を使う初めての実習になるので，プログラミングの心得 (思った通りに動くのではなく，書いた通りに動く) を再確認しておこう。

■復習　データサイズや MCMC のサンプルサイズを変更するなどして，同じ乱数生成機の何をどう変えればどう変化するのかを確認しておこう。

18　モデリングの目から見た検定 1；二群の平均値の差

18.1　授業内容

18.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

データ生成モデリングの観点を踏まえた上で，検定的アプローチとベイズ的アプローチの違いを学ぶ。

二群の平均値の差の検定，いわゆる対応のない t 検定の場合は，同一の正規分布から得られたデータに対して平均値の差があると判断して良いかどうかを判断するという枠組みであった。これらの前提と判断基準を確認し，それがデータ生成モデルの観点ではどのように表されるかを検証する。ここで結果が分布として推定されること，差があるかないかというのは二群の推定された平均値の差であることから，生成量を使って平均値の差を出力することを考える。ここで効果量に改めて目を向けるとその理解が進む。

18.1.2　コマ主題細目

t 検定の仮定　二群の平均値の差を検定するときは t 検定が利用されるが，データが正規分布から得られているという仮定，分散が同じであるという仮定などを踏まえて設計図を書き，これを Stan で表現することを考える。あらためて t 検定のやり方や結果と比べてみることで，モデリングがデータ生成メカニズムに注目していること，パラメータの推定を行なっていることなどが確認できるだろう。また等分散性の仮定を外す方法についてもすぐに応用ができる。

帰無仮説検定と二群の差の検定について，→ 山田・村井 (2004) や一年次の資料をもとに確認しておく。

差の分布　検定は推測に加えて判断を行なっていた，ということを改めて確認するとともに，帰無仮説検定では母平均の差をターゲットにしていたことを確認する。MCMC は母集団からの代表値であるので，推定された結果を使って差を表現することができる。これは R 側で得られたサンプルで行っても良いし，Stan の生成量を使っても良い。ここで `generated quantities` ブロックの考え方を導入し，平均値の差の分布を確認すること，帰無仮説検定が差の分布の一点についての仮説であったことを確認する。また一方が他方よりも大きくなる確率はどれぐらいかとか，一方と他方が c 以上に違っている確率はどれぐらいか，と言ったことが生成量を使って計算することができるようともいえる。

帰無仮説検定を省みる　ここまでくると，帰無仮説検定のロジックや考え方について別の視点から見ることができるようになるであろう。まずは帰無仮説と対立仮説という対立のさせ方の不平等さである。帰無仮説は一点についての仮説であり，対立仮説はそれ以外であればなんでも良い，という非対称な関係になっていた。それを省みると，差があるかないかといった二値判断に陥ることがいかに危険であるかがわかるだろう。また量的な判断ができないことから，効果量を合わせて報告することが望ましいとされている。効果量とは，標準化された差の大きさのことであり，生成量を使って簡単に算出することができる。また方向性を持った検定について，片側・両側検定などで考えられてきたが，生成料を使えば自然にそれが検証できることがわかる。ただしこれらの検証の仕方は，今回のデータと仮定されたモデルという前提の上で成立する程度であって，過度な一般化にはならないように注意する必要がある。

18.1.3 キーワード

- t 検定
- 生成量
- 効果量
- 片側検定, 両側検定

18.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔/演習

18.2.1 予習・復習課題

■予習 Stan の基本的なブロック構成, 設計図からコードに落とすやり方を確認しておこう。

■復習 データのサイズが変わるだけでなく, 平均値の差, 効果量が変化したときの t 検定の結果とベイズ推定の結果がどのように変わるのか, さまざまなケースを想定して「遊んで」みるとよい。加えて, そのほかの仮説検定がどのようなデータ生成メカニズムで表現できるかを考えることは, 次回以降の準備にもつながる。

19　モデリングの目から見た検定 2；パタメータの世界とデータの世界

19.1　授業内容

19.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

データ生成メカニズムの観点から帰無仮説検定を省みた場合，拙速な結論に飛びつかずに慎重な議論ができることを確認した。また事後予測分布を作ることで，柔軟な仮説を考えられることなども示された。

本時は，同じく事後予測分布を使いながら，パラメータでなくデータのレベルでの比較ができることに言及し，実質的に差があるとはどういうことであるかを考える。パラメータの世界，データの世界を分けて考えられるように注意を促す。まずは事後予測分布をみることで，モデルが現在のデータを正しく再現しているかを見ることで，視覚的にモデルの正しさが検証できることを確認する。その上で，新しく作られた分布の特徴から，閾上率や優越率などを計算することができる。これらはデータに基づく予測であるから，より具体的で実感を得やすい予測として使えるだろう。翻って，仮想データを生成して検証する，パラメータリカバリの手法を学ぶ。この方法では真値やサンプルサイズを自由に設定し検証できることから，例数設計に応用することが可能である。ベイズ推定をしない場合であっても，シミュレーションによる例数設計が有用であることを理解する。

19.1.2　コマ主題細目

事後予測分布　推定値をつかって，新たにデータを生成した場合どのようなことが言えるか。事後予測分布を描くことでモデルの正しさが確認できる。事前分布の特徴を反映した，事前予測分布についても触れる。

事前と事後の予測については →Lee and Wagenmakers (2013) の Pp.38–42 が詳しい。

データレベルの仮説　これまで考えてこられた仮説は，パラメータについての仮説であった。一方，事後予測分布が新しいデータを作っているのであれば，そこからデータレベルの仮説を考えることもできる。閾上率や優越率といった，データのレベルでの仮設を検証したり検討したりすることを考える。これらの視点は帰無仮説検定およびモーメント法による算出よりもわかりやすいかもしれないし，統計的に差があるということがどの程度意味のあることなのかを実感するのにも役立つだろう。

優越率，閾上率については，→ 豊田 (2016)，Pp.69–70.

パラメータ・リカバリ　事後予測分布は乱数発生による新しいデータの生成である。であれば乱数発生のアプローチは，理論に従う仮のデータを生成することができる，ということでもある。シミュレーションとして仮にデータを作ってみて，サンプルサイズがどの程度であればどの程度正確な推定ができるのか，と言った理論的な検証をすることができる。これはパラメータ・リカバリという試みでもあり，モデルが複雑になって行ったときに正しく機能するかどうかをチェックする方法でもある。また，サンプルサイズも自由に変えることができるのだから，どの程度のサンプルがあればどのような結果が得られるのか，と言ったシミュレーション，あるいは実験前のサンプルサイズ設計にもつながる。

モデリングの基礎的手順について，→ 松浦 (2016) の Pp.12–81.

19.1.3　キーワード

- 生成量
- パラメータ･リカバリ
- 事後予測分布
- 例数設計

19.2　授業情報

■コマの展開方法　講義/遠隔/演習

19.2.1　予習・復習課題

■予習　`generated quantities` ブロックの書き方について, 数値を色々変えて確認しておくとよい。

■復習　さまざまなサンプルサイズ, 効果量の仮想データを生成し, 帰無仮説検定やベイズ法による推定を繰り返すことで, 各手法の長所や短所を考えることができる。遊び心を持って, さまざまな状況生成して, 実際に試してみること。

20 モデリングの目から見た検定 3；多群の平均値差を求めるモデル

20.1 授業内容

20.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

ここまで `generated quantities` ブロックの活用で，事後分布，事後予測分布を生成できること，パラメータの世界，データの世界それぞれでの仮説が検証できることを見てきた。またパラメータリカバリの方法を見ることで，データ生成モデルを分析前に活用する方法についても見た。

続いて多群の平均値差を求めるモデルを考える。まずは一要因 3 水準の Between モデルから，三つの平均値をバラバラに求めること，生成量から差分を計算することを考える。データやパラメータレベルでの仮説的な検証方法を再確認し，帰無仮説検定の枠組みで考えなければならなかったアルファ水準のインフレ問題が生じないことを，確率の考え方の違いに即して理解する。続いて差をモデルに組み込む方法を考える。ここでパラメータの数に制約をかける方法として `transformed parameters` ブロックの使い方を導入する。またパラメータの数の制約は，自由度の概念と深く関係していることへの洞察を得る。またパラメータリカバリのコードがリバースエンジニアリングのコードと同じもので，鏡合わせの関係にあることを確認する。続いて交互作用が含まれるモデルを考える。ここで制約からどれだけのパラメータが必要か，どのように組み上げるかを学ぶことができる。

20.1.2 コマ主題細目

要因計画モデル 一要因 3 水準 Between モデルを考える。対応のない二群の時のように，これは素直に 3 群のモデルとして表現できるし，群間の差を生成量として計算できることを再確認する。また検定と違って差の大きさを直接検証すること，確率的判断を含まないことから，アルファ水準のインフレ問題に悩む必要がないことがわかる。この考え方は，確率の捉え方の違いにもつながることに留意する。

パラメータの変形と制約 三群のうち，ある群を基準にした差分を直接パラメータとして推定するモデルを考えると，二つの差分を計算することができる。またある群を基準におかなくとも，全体平均を基準に置くことができるが，その場合は差分のパラメータに制約をかける必要がある。これらの制約を含んだモデルを，`transformed parameters` ブロックを使って作ることを確認する。ここでパラメータの自由度について理解する。

モデルの洗練 技術的な問題であるが，多群モデルの場合は一般的に描画するためにも，整然データの形式に整えておくことが望ましい。書いたモデルの一般化という観点から，変数にできるところは変数にするなど，コードの洗練を試みる。ここで群を識別する変数を導入することは，今後の個人内反復測定モデルにも応用できる点であるので，しっかり理解する。

パラメータリカバリ これらのモデルのパラメータリカバリから，仮想データはデータ生成モデルを逆転させるだけで出来上ががことがわかり，要因計画を裏側から眺めるような，新しい観点からの理解が進むと考えられる。

20.1.3　キーワード

- 要因計画
- 整然データ
- 生成量
- パラメータリカバリ

20.2　授業情報

■コマの展開方法　講義/遠隔/演習

20.2.1　予習・復習課題

■予習　パラメータリカバリの必要性など，データ生成モデルのアプローチにおける標準的な手順を再確認する。また対応のない二群の平均値差の検定，要因計画の検定についてこれまでの復習をしておくことで，今回の内容の理解が深まるだろう。

■復習　要因数が増えた場合どのようになるか，またその都度 Stan モデルを書き換えなくても良くなるような一般的な書き方について，自分なりに試行錯誤することが望ましい。

21 モデリングの目から見た検定 4;対応のある群の比較

21.1 授業内容

21.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

ここまで Between 計画についてのモデル化を勧めてきたが，ここからは Within モデルについて考えることにする。Within モデルは相関係数の考え方と，階層モデルへの入り口として位置付けることができる。

Within モデルは対応がある場合であり，変数間に相関関係を想定することになる。相関関係のあるデータ生成分布は，多変量分布であり，正規分布を多次元正規分布に拡張する必要がある。

多変量正規分布が必要とするパラメータはベクトルと行列であることから，Stan におけるベクトル型，行列型など特殊な型についての理解を進める。

21.1.2 コマ主題細目

対応のある群 対応のあるデータというのは，反復測定あるいは測定間に相関関係が想定されるデータでとして考えることができる。データの間に相関関係がある場合，多次元正規分布から出てくるモデルになることから，これを使ったデータの書き方を習得する。まずは多次元正規分布の考え方とその表現方法を理解する。

ID を持ったデータ構造 既に識別変数をもった整然データのモデル化については習得している。コード化するときは群の識別 ID ではなく個人の識別 ID を持ったコードを作成することになる。代入された変数がさらに代入されるという入子構造のプログラミングに慣れる。

個人差と変化量を想定した書き方 モデルを 3 群以上の比較にすることを考えると，多次元モデルをさらに広げることになるが，別の表現の仕方としてベースラインとそこからの変化量として表現できることになる。この時，ベースラインの散らばりすなわち個人差は，別の分布から出てきていることになる。この表記方法は今後の階層モデルにつながる観点でありことに言及する。

21.1.3 キーワード

- Within 計画
- 分散共分散行列
- ベクトル型と行列型
- 多次元正規分布

21.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔/演習

21.2.1 予習・復習課題

■予習 対応のある t 検定や Within モデルなど，伝統的な方法による分析方法について復習しておく。

■復習　パラメータリカバリや身の回りのデータを使って，今回のモデルが具体的にどのように使うことができるかを考えておく。

22 モデリングの目から見た検定 5;カテゴリカル分布をつかって

22.1 授業内容

22.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

22.1.2 コマ主題細目

これまでは連続変数についてのモデルばかり扱ってきたが，度数など心理学で扱うデータの中にはカテゴリカルなものも少なくない。これらを帰無仮説検定の文脈で扱う時は，χ^2 検定が有用であるが，カテゴリカルな分布を使ったベイジアンアプローチもちろん，結果の解釈には有用かつ直感的である。

ここでは連続分布と離散分布の違いを確認し，いくつかの代表的な離散分布を演習とともに学び，カテゴリカルな出力変数の分析にも確率モデルが有用であることを確認する。

離散的な分布 変数には離散･連続の違いがあり，確率分布でも確率質量と確率密度の違いがある。ここでは代表的な離散確率変数であるベルヌーイ分布，二項分布，多項分布を導入する。

→ 松浦 (2016) の Pp.82，83，85–89.

χ^2 検定 カテゴリカルな変数の検定についてはこれまで扱って来なかったため，ここで改めて χ^2 分布を使った検定の例を導入する。χ^2 検定は比率 (割合)，独立性，関連の強さ，適合度の検定などに用いられることを確認する。帰無仮説のおき方に注意することと，この検定がモデル適合度などの文脈でも望一られることに言及する。

→ 山内 (2010) の Pp.189-197.

カテゴリカル分布のモデリング 確率分布を用いたアプローチをすることで，母比率を直接検証したり，連言命題が成立する確率など生成量を使ってさまざまな検証ができることを確認する。

→ 豊田 (2016) の Pp.136–163.

κ 係数の算出 変数間の関連の強さを見る指標として κ 係数がある。一致率の係数ともして知られており，記述統計的アプローチでも算出できるものではあるが，確率モデルで表現する場合は工夫が必要である。

→Lee and Wagenmakers (2013) の Pp.56–59.

22.1.3 キーワード

- 離散分布と連続分布
- ベルヌーイ分布
- 二項分布
- 多項分布
- クロス集計表

- κ 係数

22.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔/演習

22.2.1 予習・復習課題

■予習 確率変数が連続的か，離散的かということがどういう違いであるのかについて，データ解析基礎の確率に関する資料などを参考に確認しておく。また尺度水準による数値データの分類についても見直しておくと良い。

■復習 カテゴリカルな分類，集計に関しては身の回りに多くのデータ例がある。たとえば官公庁の統計資料などをもとに，母比率の推定や連言命題が成立する確率など，さまざまな仮説を自ら立てて検証すると良い。

23　一般化線形モデル

23.1　授業内容

23.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

23.1.2　コマ主題細目

ここまで要因計画が線形モデルと同一であること，すなわち一般線形モデルについて議論されてきた。あらためて回帰分析の確率モデルを考えると，平均に構造を入れたモデルという意味で同じであることが確認できる。ここで確率分布を違う形に変えることでより一般的な線形モデル，一般化線形モデルに拡張することができる。確率モデルによっては結果変数の型の違いによって確率分布が変わり，確率分布によってはパラメータの取りうる範囲が定まるのでリンク関数によって変換する必要があること，結果を解釈するときはリンク関数を経由して分析されていることなどに注意が必要である。まずはパラメータの数が少ないロジスティック回帰について学ぶ。

一般線形モデル　正規分布の平均構造を導入するという意味で，回帰分析のベイズ推定はこれまでと同様に実施，解釈することができる。事後分布や事後予測分布などを使って，最尤推定のモデルと異なる点を確認しておく。

データに合わせた確率分布　データの形によっては確率分布の形を変える必要がある。まずはベルヌーイ分布によるロジスティック回帰分析を通じて，確率分布関数を選択できること，そのためにパラメータの形をリンク関数を経由し得て変換することを学ぶ。

リンク関数とパラメータの解釈　リンク関数を介して線形モデルを考えるので，独立変数が一単位増えることがそのまま従属変数が一単位増えることにはつながらない。これらの関係を知るために，リンク関数，逆リンク関数の関係を辿って考える。ロジスティック回帰の場合は，オッズ，オッズ比などの用語にも触れることになる。またリンク関数による一般化が理解できれば，同様の考え方で他のさまざまな離散確率分布に応用できることが用意に想像できるだろう。

23.1.3　キーワード

- 一般化線形モデル
- ベルヌーイ分布
- ロジスティック回帰分析
- リンク関数
- オッズ比

23.2　授業情報

■コマの展開方法　講義/遠隔/演習

23.2.1 予習・復習課題

■予習 確率変数が連続的か，離散的かということがどういう違いであるのかについて，データ解析基礎の確率に関する資料などを参考に確認しておく。また尺度水準による数値データの分類についても見直しておくと良い。

■復習 離散的なデータについて，身近な例を考えてみると良い。また今回導入した分布関数以外にも応用を考えることができるから，確率分布とリンク関数の一覧を参考にさまざまなモデルに思いを馳せてみると良い。

24 階層線形モデル

24.1 授業内容

24.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

ここまで線形モデル，一般化線形モデルの例を見てきたが，久保 (2012) の例にならって一般化線形混合モデル，階層ベイズモデルへとモデルを展開させていく。

一般化線形混合モデルについては，Within デザインですでに対応しており，正規分布以外の確率分布を使うことで一般化可能である。ここに切片や傾きなど，係数の方に分布が混ぜ合わせられることで階層化されたモデルとなる。ネストされたデータの具体例として，反復測定と大規模調査の二種類を取り上げ，また階層モデルの設計図を書いてから分析コードを書く手順を確認する。

24.1.2 コマ主題細目

一般化線形混合モデル Within デザインの分析モデルを再確認するところから考える。このモデルは個体差のような個人ごとに変わる要因が含まれており，ここで変量効果と固定効果の違いを考える。また従属変数が正規分布でないモデルにすることで，一般化線形モデルと考えることができる。

ネストされたデータ すでに反復測定データの場合が該当するが，データが階層性を持っているネストされたデータの例として，プロ野球データや大規模調査の例を考える。これらに対して，階層化しない分析とする分析とで解釈が異なる例を挙げ，階層的なデータに対して適切な分析が必要であることを理解する。

階層線形モデル 階層化されたモデルを数式的に理解する。名称として，レベル 1/2 の効果，個人/集団レベルの効果と呼ばれることもあることを確認する。またモデルの設計図をかき，それをコードに起こすことで分析ができることを確認する。個別の回帰直線を引く場合に比べて，縮小が起こっていることをモデル比較を通じて確認する。

24.1.3 キーワード

- 混合モデル
- ネストされたデータ
- 固定効果
- 変量効果
- 階層モデル

24.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔可/演習

24.2.1　予習・復習課題

■予習　反復測定デザインの分析例を確認しておく。そこで分布が混合されていることを確認しておく。

■復習　階層線形モデルが応用できるようなデータ例を身の回りから考えてみるとよい。その上で，データがどのような背景から生成されているかの設計図を書き，設計図からコードに起こすという手順を一歩ずつ確認しておこう。

25　混合分布モデル

25.1　授業内容

25.1.1　科目の中でのこのコマの位置づけ

ここまで GLMM，HLM とさまざまな分布を組み合わせて利用するモデルについてみてきた。

今回は混合正規分布モデルと 0 過剰ポアソンモデルを考える。これまではデータが全体的に均質的であることを想定していたが，そもそも異なる種類のデータが混じり合っていると考えられる場合，異なる分布をあてがう方が良い。ここでどちらの分布に属するかがある種の確率で代わり，それに従って続くモデルが異なるという，離散確率分布による条件分岐をデータ生成メカニズムに導入することになる。またこれを Stan で実行する場合には，離散変数が直接扱えないことから，すべての可能な場合を数え上げて足し合わせるという周辺化して消去するというテクニックを利用することになる。技術的に高度な側面もあるが，条件分岐をデータ生成メカニズムに組み合わせることができれば表現力は一気に広がることになる。

25.1.2　コマ主題細目

混合分布モデル　混合分布モデルは確率的なクラスター分析 (Model Based Clustering) でもある。階層線形モデルと違って，クラスター分析はデータの背後にあるクラスが明示的に示されておらず，データの適合から考えることになる。まずデータの可視化によってまずその可能性に気づき，これをどのようにモデル化できるか，そのアイデアを理解する。具体的には，ベルヌーイ分布など離散変数のパラメータによって条件分岐が発生し，各条件のもとで確率モデルが描かれることになるが，この確率モデルをどのように統合するかということを設計図の段階で理解する。設計図での理解を踏まえて，Stan での実装レベルでの理解に進むことができるのだから。

→ 松浦 (2016) の Pp.209–213.

周辺化消去　Stan は離散確率分布を直接モデルの中に組み込むことはできない。そこで `log_sum_exp` という特殊な関数を使って，すべての場合わけを行った離散モデルの統合を考える。まずターゲット記法について理解し，続いて周辺化消去の書き方を理解する。また混合正規分布モデルの場合，ラベルスイッチングの問題が生じることが考えられるから，`ordered vector` の型を利用することが多い。こうした特殊な関数やベクトルについても理解を深める

→ 松浦 (2016) の Pp.203–208.

0 過剰ポアソン　データの性質を考えると，必ずしも正規分布モデルばかりではなく，離散変数など一般的なモデルまで拡張することが可能である。そこで野球データなど具体的な分布情報とともに，ゼロ過剰ポアソン分布を使ったモデルを考える。データ生成のメカニズムがより具体的，実践的に考えることができるので，モデリングによる分析の自由度が高まることを実感できるだろう。

→ 松浦 (2016) の Pp.82，83，85–89.

25.1.3 キーワード

- クラスター分析
- 混合分布モデル
- 周辺化消去
- ゼロ過剰ポアソン分布

25.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔可/演習

25.2.1 予習・復習課題

■予習 データの描画から気づかされることは無数にある。探索的にデータプロットができるように，`ggplot` やデータハンドリング技術について復習しておくことが望ましい。

■復習 混合分布モデルが応用できるようなデータ例を身の回りから考えてみるとよい。その上で，データがどのような背景から生成されているかの設計図を書き，設計図からコードに起こすという手順を一歩ずつ確認しておこう。

26 確率的プログラミングの応用 1; 項目反応理論

26.1 授業内容

26.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

ここまでで線一般形モデル，一般化線形モデル，階層線形モデル，混合分布モデルと定型的な分析モデルについて一通り学んできた。以後はアラカルト的に，確率的プログラミングの応用による柔軟なモデリング例のトピックスを取り上げる。最初に扱うのは，既に前期に学んだ項目反応理論のモデリングである。尺度作成の文脈で，理論的概要は一通り説明が終わっているところであるが，改めて確認するとともに確率的モデリングとして実装する。確率モデルとして考えると，0/1 の反応に対するロジスティック回帰の応用であり，実装自体は既有知識の応用で可能であろう。コーディングのポイントとして，long 型データ (tidy data) にしておくことで欠損値が含まれる場合も対応できるようになることが挙げられる。

26.1.2 コマ主題細目

ロジスティックモデルの復習 本講では前期のうちに，ロジスティックモデルについての理論的説明と，R の `ltm` パッケージによる実践例を解説済みである。とはいえ，以前学んでから時間が空いているので，あるいは後期のみ履修する学生もいることが考えられるんので，授業の冒頭で 15 分程度の時間をかけて，大まかな理論･モデルの復習をしておく必要があるだろう。

ロジスティック回帰モデルでの実装 ロジスティック回帰分析を思い出しつつ，1PL,2PL,3PL モデルそれぞれを `transformed parameters` ブロックで記述することを演習で学ぶ。

整然データでの分析 データを整然データの形にして分析することで，欠損値が含まれないデータセットを作って分析に応用することができる。ここでは個人と項目それぞれを識別する変数が必要になるが，これまで学んできた技術で十分対応可能であると考えられる。

26.1.3 キーワード

- 項目反応理論
- 1PL ロジスティックモデル
- 2PL ロジスティックモデル
- 3PL ロジスティックモデル
- 整然データ

26.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔可/演習

26.2.1 予習・復習課題

■予習 これまでの知識や技術を組み合わせて問題に対応することになる。項目反応理論とロジスティックモデル，GLM におけるロジスティック回帰分析，データハンドリングにおける整然データの考え方など，これまでの資料に戻って復習しておくと良い。

■復習 自分で描いたモデルが R のパッケージが出す答えとどの程度一致するのかを確認しておこう。また欠損値がある被験者の被験者母数は，その確信区間が広くなると考えられる。なぜそうなるかを改めて考え，実際のデータ適用例で確認しておこう。

27 確率的プログラミングの応用 2; 変化点と折線回帰

27.1 授業内容

27.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

27.1.2 コマ主題細目

変化点検出は，時系列的なデータの中に異なる二つの平均値を持つ群があることをモデリングする手法である。とくにある時点から異なる群に属する，という系列的な意味があることと，変化点があるとすればどのあたりになるかという「変化点の位置的不明確さ」を確率分布で表現し，データから検出するという観点は，確率モデルの表現の自由さとデータとの接合を許す確率的プログラミング言語の面白さを味わうには最良の材料である。

まずは混合分布モデルのように，二つの群を分類するモデルを再確認し，その上で時系列的なデータという既有知識から「変化点」という考え方の導入，モデリングへと繋げる。またデータによっては，一定の点を期に線形モデルの傾きが変わるような表現が可能なものがある。この変化点と回帰分析を融合させた，折線回帰モデルを考えることで，固定的なモデルを超えた柔軟なモデリングが可能であることを理解する。

ただしここで使うデータは時系列的なものであるから，一般的な回帰分析の前提であるサンプルの独立性がない。その意味で不適切なモデルであることに注意し，次回の時系列分析へと繋げる。

混合分布モデル データは可視化することが重要であり，見れば明らかに異なる状態の混合であることがわかる場合がある。具体例とともに可視化を行い，またこれまで学んだ混合分布モデルで表現できることを再確認する。ここで用いるデータは，小杉の体重記録データを用いる。

変化点検出 データの横軸が時系列的な意味を持つのであれば，時空を超えて二つの群が混合しているというのは不自然な前提である。そこで横軸に時系列的な意味を置くと，ある時点から状態が変化したものとして考えることができる。ここでその時点が「いつ」であるのかは不明であるが，わからないことを確率で表現するのが確率モデルのおもしろい点である。変化点を確率的パラメータとし，その前後で群が異なるというモデルは，変化点検出のモデリングと言われる。このモデリングはポリグラフ検査など，実践的な場面での利用価値も高い。

→Lee and Wagenmakers (2013) の Pp.59–61，松浦 (2016) の Pp.238-245

折線回帰 平均点の位置が変わるだけでなく，変化の傾向が明らかな場合は線形モデルを当てはめることができる。変化点の前後で傾きが変わるような線形モデルは，折線回帰とも呼ばれる。折線回帰モデルの実装については，変化点と回帰モデルを組み合わせたあとで，折れる点を繋げる数学的補正を加えたモデルへと修正する。最後に，説明変数が時点であることから回帰分析の前提として標本の独立性が担保されていない問題を指摘する。

27.1.3 キーワード

- 混合分布モデル

- 変化点
- 折線回帰
- 時系列分析

27.2　授業情報

■コマの展開方法　講義/遠隔可/演習

27.2.1　予習・復習課題

■予習　混合分布モデルの応用になるので，混合分布モデルの基本的な書き方や解析方法について，第 25 講を復習しておくことが望ましい。

■復習　折線モデルが応用できそうなデータを見つけて，自分なりに実践してみると理解が深まるだろう。とくに折れる点が複数あるモデルや，折れる点の数を検出するモデルへと拡張するなど，モデル展開の可能性をかんがえることもできる。

28 確率的プログラミングの応用 3; 状態空間モデル

28.1 授業内容

28.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

前時に時系列的なデータを導入したが, 時系列的な性質を無視したモデリングになっていた。時系列的な分析方法は, 心理学においてもウェアラブル端末の利用や SNS など公的なデータを分析することなどにも利用できるため, 非常に有用なものになりうる。しかしデータの特徴として非独立性の問題, 周期性やトレンドの存在などがあり, 周波数解析をおこなったり多次元の行列分解などが必要である。中でも状態空間モデルは比較的シンプルであり, とくにベイジアンアプローチで実装が容易になったと言えるだろう。

ここでは状態空間モデルの基本的な考え方を導入し, モデリングについて解説する。ここで状態と観測の分離を行い, とくに観測が行われていない点があっても分析できること, 観測が行われていない点をパラメータとして保管することに言及する。観測が行われていない点が保管できるのであれば, 未来の時点についても予測が可能になるということである。ホワイトノイズモデルでそれを行うと, 確信区間が広がっていくことが観測される。そこでトレンドを入れたモデルにすることで, さらに予測の形を変えられることを学ぶ。

そのほかにも季節項など, 時系列特有の情報を組み込めることや, 二次元に展開することで空間データの分析にも応用できることに言及する。

28.1.2 コマ主題細目

時系列データの特徴 時系列的なデータがどのように得られ, どのようなシーンで利用可能であるかを概観する。ここで時系列データはサンプルの独立性が満たされていないという問題があるため単純な線形回帰は不適切であること, また周期性やトレンド, 介入効果が出てくるまでの期間など独自に考えなければならないことがいろいろ含まれている。これまで研究されてきた領域や研究方法について概観する。

状態空間モデル さまざまな分析方法がこれまで考えてこられているが, 状態空間モデルはその中でも比較的簡単な数理的構造を持ち, またベイジアンモデリングを利用することでかつての分析モデルが必要としたスムージングなどを, 特段意識することなく分析できる。状態と観測というモデルの基本構造を提示し, これらがどのように実装可能かをみる。

→ 松浦 (2016) の Pp.229-235, 馬場 (2019) の第 5 部

欠損値の補間 観測時点には欠損が含まれることもあり, これをパラメータとして推定・補間することができる。またこれが可能であるということは, 未来の時点を欠損値として考えれば予測ができることにもなる。プログラミングの工夫により, 欠損を補間するようなコードの書き方を学ぶ。また単純なホワイトノイズモデルであればあまり予測として意味がないが, トレンドを考えることで時系列的な影響について考えることができる。

状態空間モデルの展開 状態空間モデルは, 説明変数を加えた回帰モデルに応用したり, 周期性をモデリングすることなども可能である。さらに時系列は一次元的であるが, 二次元にも広げると空間分析にも

利用が可能であることに言及する。これからの心理学は，時系列や空間など状況変数をより積極的に取り組んだモデルも利用するようになるだろう。

28.1.3 キーワード

- 状態空間モデル
- トレンド
- 補間

28.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔可/演習

28.2.1 予習・復習課題

■予習 時系列データを，時間を独立変数とした回帰分析にすることでどういった問題があるのかについて，回帰分析や確率モデルの前提などを考えて振り返っておくことが良い予習になるだろう。

■復習 身の回りの身近ところからでもデータを取ることができるのが，時系列データのおもしろいところでもあるので，応用可能なデータを探して分析してみると良い。可能であれば今日からでも，時系列的なデータを取り始めると，長期的に見て非常に興味深い分析ができるようになるだろう。

29 モデル比較

29.1 授業内容

29.1.1 科目の中でのこのコマの位置づけ

最終回となるこの回では，これまで後期の授業で扱ってきたさまざまなモデルについて総括し，ベイジアンモデリングの心理学的位置付けについて解説する。加えて最後の話題提供として，モデル比較について言及する。帰無仮説検定の代わりとして考えるのであれば，区間推定を使った比較が必要であるし，ベイジアンモデリングの観点からはモデル比較になる。ベイズファクターによるモデル比較とそれを実行するためのブリッジサンプリング法，また WAIC など予測的観点から評価する方法があることなどに言及する。

29.1.2 コマ主題細目

ベイジアンモデリング 一般的に「モデリング」という観点から，これまでの授業内容だけでなく心理学における研究法としてのその意味や意義を考える。帰無仮説検定の Alternative として利用するだけでなく，心理学的メカニズムをより具体的に，緻密に記載するために数学的方法を用いることで，心のメカニズムの理解を深めることができるかもしれない。そこに含まれる仮定や前提について，自覚的に記述する必要があることがモデリングの利点であり，MCMC をはじめとするベイズ統計の技術は，それを可能にしてくれる方法論的補助にすぎない。

帰無仮説検定の代案 帰無仮説検定の代わりにモデリングアプローチを取ることの利点はさまざま挙げられるが，p 値のように「ここだけ見ておけば良い」というような機械的判断ができる基準がない。むしろそうした機械的判断の弊害が指摘されてきているのであるが，代案としてはどのような基準があるのかはドメイン知識に基づく必要がある。むしろパラメータだけでなくデータの観点から考察できるようになったことや，実質的な値に基づいて考えられることを利点と捉えつつ，判断基準としての ROPE などについて一瞥する。

パラメータ推定かモデル比較かについては，→Kruschke (2014) の Pp.341–361.

モデル比較 モデルとその有用性を考えるにあたって，パラメータ推定かモデル比較かという二つのアプローチがあり得る。後者については，階層モデルによるもの，ベイズファクター，WAIC が考えられる。ただし WAIC については，渡辺ベイズ理論ともいうべき，より包括的なベイズ理論の枠組みで捉え直す必要があり，心理学研究にこの枠組みがどれほど有用かについては，いまだに結論が出ていないところでもある。ここでは概略的にその特徴に触れるにとどまり，受講生諸君の今後の活躍に期待したい。

WAIC については → 浜田・石田・清水 (2019) が丁寧である。

29.1.3 キーワード

- ROPE

- ベイズファクター
- サヴェージ・ディッキー法
- ブリッジサンプリング

29.2 授業情報

■コマの展開方法 講義/遠隔可/演習

引用文献

足立　浩平 (2006). 多変量データ解析法ー心理・教育・社会系のための入門　ナカニシヤ出版，第単行本版，171

馬場　真哉 (2019). 実践 Data Science シリーズ R と Stan ではじめる ベイズ統計モデリングによるデータ分析入門 (KS 情報科学専門書)　講談社

Grimm, L. G., & Yarnold, P. R. (2001). *Reading and Undestanding More Multivariate Statistics*: American Psychological Association. (グリム，L.G.・ヤーノルド，P.R. 小杉　考司・高田　菜美・山根　嵩史 (訳)(2016). 研究論文を読み解くための多変量解析入門 応用篇: SEM から生存分析まで　北大路書房)，URL: http://amazon.co.jp/o/ASIN/4762829439/

浜田　宏・石田　淳・清水　裕士 (2019). 社会科学のためのベイズ統計モデリング　朝倉書店，URL: http://amazon.co.jp/o/ASIN/4254128428/

豊田　秀樹 (2012). 項目反応理論 [入門編](第 2 版) (統計ライブラリー)　朝倉書店，第単行本版

平岡　和幸・堀　玄 (2004). プログラミングのための線形代数　オーム社，第単行本版，355，URL: https://lead.to/amazon/jp/?op=bt&la=ja&key=4274065782

清水　裕士 (2018). 阪神ファン一巨人ファンの 2 大精力構造は本当か　豊田秀樹　(編) たのしいベイズモデリング (pp. 21–32)　北大路書房

J.Dobson, A. (2008). 一般化線形モデル入門 原著第 2 版，田中　豊・森川　敏彦・山中　竹春・冨田　誠 (訳)　共立出版，第単行本版，280，URL: https://lead.to/amazon/jp/?op=bt&la=ja&key=4320018672

川端　一光・荘島　宏二郎 (2014). 心理学のための統計学入門 [心理学のための統計学 1]: ココロのデータ分析　誠信書房，URL: http://amazon.co.jp/o/ASIN/4414301874/

加藤　健太郎・山田　剛史・川端　一光 (2014). R による項目反応理論　オーム社，第 Kindle 版版

小杉　考司 (2018). 言葉と数式で理解する多変量解析入門　北大路書房，URL: http://ci.nii.ac.jp/ncid/BB27527420

小杉　考司 (2019). その他の他変量解析　楠見　孝・日本心理学会　(編) 公認心理師の基礎と実践 5 心理学統計法 (pp. 189–206)　遠見書房

小杉　考司・清水　裕士 (編) (2014). M-plus と R による構造方程式モデリング入門　北大路書房，第単行本版，332，URL: https://lead.to/amazon/jp/?op=bt&la=ja&key=4762828254

Kruschke, J. (2014). *Doing Bayesian data analysis 2nd Edn.* NewYork: Elsevier2nd ed. (クルシュケ，J.K 前田　和寛・小杉　考司 (監訳)(2017). ベイズ統計モデリング: R,JAGS, Stan によるチュートリアル 原著第 2 版　共立出版)

久保　拓弥 (2012). データ解析のための統計モデリング入門–一般化線形モデル・階層ベイズモデル・MCMC (確率と情報の科学)　岩波書店，第単行本版，272

Lee, M. D., & Wagenmakers, E.-J. (2013). *Bayesian Cognitifve Modeling:A Practical Course*: Canbridge University Press. (マイケル・ D.　リー・エリック-ジャン　ワーゲンメイカーズ井関　龍太 (訳)(2017). ベイズ統計で実践モデリング: 認知モデルのトレーニング　北大路書房)，URL: http:

//amazon.co.jp/o/ASIN/4762829978/

松浦　健太郎 (2016). Stan と R でベイズ統計モデリング (Wonderful R)　共立出版，URL: http://amazon.co.jp/o/ASIN/4320112423/

三中　信宏 (2018). 統計思考の世界 ～曼荼羅で読み解くデータ解析の基礎　技術評論社

宮谷　真人・坂田　省吾・林　光緒・坂田　桐子・入戸野　宏・森田　愛子 (編) (2009). 心理学基礎実習マニュアル　北大路書房，第単行本(ソフトカバー)版

村上　正康・佐藤　恒雄・野澤　宗平・稲葉　尚志 (2016). 教養の線形代数　培風館，第単行本版

長沼　伸一郎 (2011). 物理数学の直観的方法〈普及版〉 講談社，第 Kindle 版版，301，URL: https://lead.to/amazon/jp/?op=bt&la=ja&key=B00JQYYCPA

岡太　彬訓 (2008). データ分析のための線形代数　共立出版，URL: http://amazon.co.jp/o/ASIN/4320018591/

岡太　彬訓・今泉　忠 (1994). パソコン多次元尺度構成法　共立出版，第単行本版，174，URL: https://lead.to/amazon/jp/?op=bt&la=ja&key=4320014723

芝　祐順 (1979). 因子分析法　東京大学出版会，第単行本版

Stevens, S. S. (1946). On the theory of scales of measurement. *Science*, *103*(2684), 677-680.

末永　俊郎 (編) (1987). 社会心理学研究入門　東京大学出版会，第ハードカバー版

高橋　正視 (2002). 項目反応理論入門―新しい絶対評価　イデア イデア出版局，第単行本版，255，URL: https://lead.to/amazon/jp/?op=bt&la=ja&key=4900561002

高根　芳雄 (1980). 多次元尺度法　東京大学出版会，第－版，332，URL: https://lead.to/amazon/jp/?op=bt&la=ja&key=B000J8ABSO

田中　良久 (1977). 心理学的測定法　東京大学出版会，第単行本版

豊田　秀樹 (2000). 共分散構造分析 応用編―構造方程式モデリング (統計ライブラリー)　朝倉書店，第単行本版，303，URL: https://lead.to/amazon/jp/?op=bt&la=ja&key=4254126611

豊田　秀樹 (2016). はじめての 統計データ分析 - ベイズ的〈ポスト p 値時代〉の統計学 -　朝倉書店，URL: http://amazon.co.jp/o/ASIN/4254122144/

山田　剛史・村井　潤一郎 (2004). よくわかる心理統計，やわらかアカデミズム・「わかる」シリーズ　ミネルヴァ書房，URL: http://ci.nii.ac.jp/ncid/BA68747748

山内　光哉 (2010). 心理・教育のための統計法　サイエンス社，第第 3 版，URL: http://amazon.co.jp/o/ASIN/4781912354/